

中国科学技术大学 2015 — 2016 学年第一学期考试试卷

考试科目 多元统计分析 得分

学生所在系 姓名 学号

(考试时间: 2016 年 1 月 19 日上午 8:30 — 10:30)

一、 (24 分) 设 $(X_1, X_2, X_3)^T \sim N_3(\mu, \Sigma)$, 其中 $\mu = (3, 1, 4)^T$,

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 6 & 1 & -2 \\ 1 & 13 & 4 \\ -2 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

试求:

- (1) 求 X_2 的分布;
- (2) 求 $Y = 2X_1 - X_2 + 3X_3$ 的分布;
- (3) 求 $Y_1 = X_1 + X_2 + X_3$ 和 $Y_2 = X_1 - X_2 + 2X_3$ 的联合分布;
- (4) 求 X_1, X_3 和 $\frac{1}{2}(X_1 + X_2)$ 的联合分布;
- (5) 求给定 $X_1 = x_1, X_2 = x_2$ 的条件下, X_3 的条件分布;
- (6) 求给定 $Y_1 = y_1, Y_2 = y_2$ 的条件下, Y 的条件分布。

二、 (14 分) 已知 Y 是一个随机变量, X 是 p 维随机向量, 设 $(Y, X^T)^T$ 的期望和协方差矩阵分别为 $(\mu_y, \mu_x^T)^T$ 和

$$\begin{pmatrix} \sigma_{yy} & \sigma_{yx} \\ \sigma_{xy} & \Sigma_{xx} \end{pmatrix}$$

求使得 $E[Y - (\beta_0 + \beta^T X)]^2$ 达到最小的 β_0 和 β , 并给出此最小值。

三、 (14 分) 人的出汗多少与人体内钠和钾的含量有一定的关系, 今测 20 名健康成年女性的出汗多少 (X_1), 钠的含量 (X_2) 和钾 (X_3), 样本均值向量和样本协方差矩阵分别为: $\bar{X} = (4.64, 45.4, 9.965)^T$ 和

$$S = \begin{pmatrix} 55.764 & 177.59 & -32.374 \\ 177.59 & 3795.98 & -107.16 \\ -32.374 & -107.16 & 68.9255 \end{pmatrix}$$

试在水平 $\alpha = 0.05$ 下检验 $H_0: \mu = \mu_0 = (4, 50, 10)^T$, $H_1: \mu \neq \mu_0$.

四、(16分) 设变量 X_1, X_2, X_3 的相关系数矩阵为 $R = \begin{pmatrix} 1.00 & 0.63 & 0.45 \\ 0.63 & 1.00 & 0.35 \\ 0.45 & 0.35 & 1.00 \end{pmatrix}$, R 的特征值和单位化特征向量分别为: $\lambda_1 = 1.96, \phi_1 = (0.63, 0.59, 0.51)^T$; $\lambda_2 = 0.68, \phi_2 = (-0.22, -0.49, 0.84)^T$; $\lambda_3 = 0.37, \phi_3 = (0.75, -0.64, -0.18)^T$.

- (1) 取公共因子个数为 2, 求因子载荷矩阵;
- (2) 计算变量共同度及公共因子的方差贡献, 并说明其统计意义。

五、(20=8+6+6分)

- (1) 写出多元情形下具有交互效应的两个因素的方差分析模型, 并简述相应的假设检验问题; 在一元情形下, 将该方差分析模型表示线性模型的形式。
- (2) 比较主成分分析与因子分析的异同点。
- (3) 简述费希尔判别法的基本思想。

六、(12分) 设抽取五个样品, 每个样品只测一个指标, 它们是 1,2,3,5,7,9, 试用最短距离法对五个样品进行聚类。

附: F 和 t 分布的部分上 α 分位点:

$$\begin{aligned} F_{3,16}(0.01) &= 5.292, & F_{3,17}(0.01) &= 5.185, & F_{3,18}(0.01) &= 5.092, & F_{3,19}(0.01) &= 5.010 \\ F_{3,16}(0.05) &= 3.239, & F_{3,17}(0.05) &= 3.197, & F_{3,18}(0.05) &= 3.160, & F_{3,19}(0.05) &= 3.127 \\ t_{16}(0.01) &= 2.583, & t_{17}(0.01) &= 2.567, & t_{18}(0.01) &= 2.552, & t_{19}(0.01) &= 2.539 \\ t_{16}(0.05) &= 1.746, & t_{17}(0.05) &= 1.740, & t_{18}(0.05) &= 1.734, & t_{19}(0.05) &= 1.729 \end{aligned}$$