

# 中国科学技术大学 2014 — 2015 学年第一学期考试试卷

考试科目 多元统计分析 得分           

学生所在系            姓名            学号           

( 考试时间: 2015 年 1 月 16 日下午 14:30 — 16:30 )

一、( 16 分 ) 设  $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_{20}$  为来自总体  $N_6(\mu, \Sigma)$ , 容量  $n = 20$  的一个随机样本, 试给出下列结果:

1.  $\mu$  和  $\Sigma$  的极大似然估计;
2.  $(\mathbf{X}_1 - \mu)^T \Sigma^{-1}(\mathbf{X}_1 - \mu)$  的分布;
3.  $\bar{\mathbf{X}}$  和  $\sqrt{n}(\bar{\mathbf{X}} - \mu)$  的分布;
4.  $(n - 1)\mathbf{S}$  的分布。

二、( 12 分 ) 设  $A = \begin{bmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$ 。

1. 写出  $A$  的谱分解;
2. 求  $A^{-1}$  及  $A^{-1}$  的特征值和特征向量。

三、( 20 分 ) 设  $\mathbf{X}$  服从  $\mu = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$  和  $\Sigma = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$  的  $N_3(\mu, \Sigma)$ 。

1. 求  $Y = X_1 + X_2 + X_3$  的概率分布;
2.  $X_1$  和  $X_2 + X_3$  相互独立吗? 为什么?
3. 求条件分布  $X_1 | X_2 = 0.5$ ;
4. 求条件分布  $X_1 | (X_2 = 0.5, X_3 = 3)$ ;
5. 求满足  $\|\alpha\| = 1$  时,  $\text{Var}(\alpha^T X)$  的最大值。

四、( 20 分 ) 假设  $(X_1, X_2)^T$  的协方差阵为  $\Sigma = \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ 。

1. 求  $X_1, X_2$  的第一主成分, 以及第一主成分的贡献率;
2. 若有一个正交公因子, 试利用主成分方法求负荷矩阵  $\Lambda$ 、特殊因子方差矩阵  $\Psi$  及残差矩阵。

五、（20分）设  $\bar{x} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ -1/2 \end{bmatrix}$  和  $S = \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$  分别为来自于总体  $N_2(\mu, \Sigma)$  一个容量为  $n = 30$  样本的均值向量和协方差矩阵。

1. 在显著性水平  $\alpha = 0.1$  下检验  $H_0: \mu = \mu_0 \leftrightarrow H_1: \mu \neq \mu_0$ ，其中  $\mu_0 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ；
2. 求  $\mu$  的置信度为 90% 的置信椭球及其半长轴和半短轴之长。

六、（12分）设两个二元随机向量  $X^{(1)}$  和  $X^{(2)}$  的联合协方差阵为：

$$Cov \left( \begin{bmatrix} X_1^{(1)} \\ X_2^{(1)} \\ \vdots \\ X_1^{(2)} \\ X_2^{(2)} \end{bmatrix} \right) = \Sigma = \left( \begin{array}{cc|cc} 64 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0.6 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0.6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 64 \end{array} \right)$$

求第一典型相关系数及相应的典型相关变量。

附：  $F$  和  $t$  分布的部分上  $\alpha$  分位点：

$$\begin{array}{llll} F_{2,28}(0.1) = 2.503, & F_{2,29}(0.1) = 2.495, & F_{2,30}(0.1) = 2.489, & F_{2,31}(0.1) = 2.482 \\ F_{2,28}(0.05) = 3.340, & F_{2,29}(0.05) = 3.328, & F_{2,30}(0.05) = 3.316, & F_{2,31}(0.05) = 3.305 \\ t_{28}(0.1) = 1.313, & t_{29}(0.1) = 1.311, & t_{30}(0.1) = 1.310, & t_{31}(0.1) = 1.309 \\ t_{28}(0.05) = 1.701, & t_{29}(0.05) = 1.699, & t_{30}(0.05) = 1.697, & t_{31}(0.05) = 1.696 \\ t_{28}(0.025) = 2.048, & t_{29}(0.025) = 2.045, & t_{30}(0.025) = 2.042, & t_{31}(0.025) = 2.040 \end{array}$$