

代数结构期末试题

本册收集了中国科学技术大学 2018 年到 2026 年共 8 套代数结构期末考试试卷, 主要整理自[评课社区资料](#), 在此对原整理者表示感谢和敬意. 在整理过程中我修改了部分题目的表述, 并借助 AI 进行了重新排版. 如有任何疏漏或希望提供未收录的试题, 欢迎通过以下邮箱与我联系: purpleriver@139.com. 希望本册能帮助大家更好地拟合往年真题, 在代数结构期末考试中取得理想的成绩.

目录

1 中国科学技术大学代数结构 2018 年期末试题	1
2 中国科学技术大学代数结构 2019 年期末试题	2
3 中国科学技术大学代数结构 2020 年期末试题	4
4 中国科学技术大学代数结构 2021 年期末试题	6
5 中国科学技术大学代数结构 2022 年期末试题	8
6 中国科学技术大学代数结构 2023 年期末试题	10
7 中国科学技术大学代数结构 2024 年期末试题	11
8 中国科学技术大学代数结构 2026 年期末试题	12

1 中国科学技术大学代数结构 2018 年期末试题

1. (1) 求方程 $6x - 4y = 2$ 的整数解.
(2) 设集合 $\Sigma = \{A, B, C, D\}$, Σ^+ 是由 Σ 中元素排列成的非空行, 请给出 Σ^+ 的归纳定义, 并判断 Σ^+ 是否可数.
2. $\langle G, * \rangle$ 是群, 已知 a 是 22 阶元, b 是 7 阶元, $a^{8x-12} = e$, $b^x = b$, 求 x 模 77 的解.
3. 在集合 $\{2, 3, 6, 12, 24, 36\}$ 上定义整除关系.
(1) 作出 Hasse 图.
(2) 求 $\{2, 3, 6, 12\}$ 的最大元、最小元、极大元、极小元、最大下界、最小上界.
4. (1) 求置换 $(1\ 2\ 4)(1\ 3\ 4)$.
(2) 证明: $\{(1\ 2), (1\ 3\ 4)\}$ 的生成子群是 4 阶对称群 S_4 .
5. 设映射 $f: A \rightarrow B$, 定义 A 上的关系: $xRy \iff f(x) = f(y)$, 证明 R 是 A 上的等价关系.
6. 证明: 循环群的同态像也是循环群.
7. (1) $\langle G, * \rangle$ 是群, $|G| \geq 2$, $\forall a \in G$, $a^2 = e$, 则存在整数 n 使得 $|G| = 2^n$.
(2) $\langle A, \oplus, *, 1, 0 \rangle$ 是布尔代数, $a + b = (a * b') \oplus (b * a')$, 则 $\langle A, + \rangle$ 是交换群.
(3) $\langle A, \oplus, *, 1, 0 \rangle$ 是有限布尔代数, 利用 (1)(2) 证明 $|A| = 2^n$.
8. $\langle R, +, * \rangle$ 是环, $|R| \geq 3$, $\forall a \in R$, $a^2 = a$, 则 R 中有零因子.

2 中国科学技术大学代数结构 2019 年期末试题

1. (9 分) 已知存在一些正整数 n , 满足:

(1) $2^n - n$ 是 3 的整数倍;

(2) $3^n - n$ 是 5 的整数倍;

(3) $5^n - n$ 是 2 的整数倍.

求同时满足条件 (1)(2)(3) 的 n 的最小值.

2. (10 分) 证明: 若两个正整数 a, b 互素, 则存在正整数 m, n , 使得

$$a^m + b^n \equiv 1 \pmod{ab}.$$

3. (9 分) 计算下列置换:

(1)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(2)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 2 & 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}^3.$$

4. (11 分) 定义正整数集 $\mathbb{N}$ 上的二元关系:

$$R = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{N}, x + y \in 2\mathbb{N}\}.$$

(1) 证明 R 是 $\mathbb{N}$ 上的一个等价关系.

(2) 求该等价关系确定的等价类集合.

5. (12 分) 设 $A = \{a, b, c, d\}$, A 上的二元关系 R_1 和 R_2 定义如下:

$$R_1 = \{(a, b), (b, c), (c, d), (d, a)\}$$

$$R_2 = I_A \cup \{(a, b), (b, a), (c, d), (d, c)\}$$

其中 I_A 为 A 上的恒等关系.

(1) 试分别指出 R_1 和 R_2 所具有的性质 (即是否具有自反性、非自反性、对称性、反对称性和传递性).

(2) 求出 $R_1 \circ R_2$, R_1^+ 和 R_2^+ (传递闭包).

6. (13 分) 集合 S 上运算 $*$ 满足结合律, H 和 K 为 S 的非空子集, $\langle H, * \rangle$ 和 $\langle K, * \rangle$ 为群, 且群 H, K 除了单位元以外无相同元素. 对于群 H, K 内的任意元素 $h \in H$ 和 $k \in K$ 有

$$h * k = k * h.$$

若 $HK = \{h * k | h \in H, k \in K\}$ 是 S 的子集.

(1) 证明 $G = HK$ 关于乘法 $*$ 构成一个群.

(2) 证明 H, K 都是 G 的正规子群.

(3) 证明商群 G/H 与 K 同构.

7. (12 分) 设 $\langle G, * \rangle$ 是群, $H = \{a | a \in G, s.t. \forall b \in G, a * b = b * a\}$. 求证 $\langle H, * \rangle$ 是正规子群.

8. (13 分) 已知实数集 R 对于普通的加法和乘法是一个含么环 (乘法存在单位元), 对于任意 $a, b \in R$, 定义

$$a \oplus b = a + b - 1$$

$$a \otimes b = a + b - ab$$

证明 R 关于 $\oplus$ 和 $\otimes$ 也构成一个含么环.

9. (11 分) $\mathbb{Q}[x]$ 是有理数集 $\mathbb{Q}$ 上多项式全体, Δ 为正整数, 集合 $S = \{a + b\sqrt{\Delta} | a \in \mathbb{Q}, b \in \mathbb{Q}\}$

定义映射 $\Psi: \mathbb{Q}[x] \rightarrow S$, $\Psi(f(x)) = f(\sqrt{\Delta})$. 证明 Ψ 为满同态映射, 并求 $\ker \Psi$.

3 中国科学技术大学代数结构 2020 年期末试题

1. 设 $A = \{a, b, c, d\}, R \subseteq A \times A$, 且

$$R = \{\langle a, a \rangle, \langle b, b \rangle, \langle a, b \rangle, \langle c, d \rangle\}.$$

求 R 的自反闭包 $r(R)$, 对称闭包 $s(R)$ 和传递闭包 $t(R)$.

2. 设 $A = \{1, 2, \dots, 20\}$,

$$R = \{\langle x, y \rangle \mid x, y \in A \wedge x \equiv y \pmod{5}\}.$$

证明 R 为 A 上的等价关系, 求商集 A/R .

3. 已知偏序集 $\langle A, \preceq \rangle$, 其中

$$A = \{a, b, c, d, e\},$$

且

$$\preceq = I_A \cup \{\langle a, b \rangle, \langle a, c \rangle, \langle a, d \rangle, \langle a, e \rangle, \langle b, e \rangle, \langle c, e \rangle, \langle d, e \rangle\}.$$

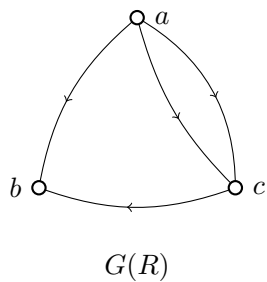
画出偏序集的哈斯图, 并指出 A 的最大元、最小元、极大元、极小元.

4. 设 $A = \{a, b, c\}$, $R \subseteq A \times A$, R 的关系矩阵为

$$M(R_1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

写出关系 R 的集合表达式, 画出对应的关系图.

5. 设 $A = \{a, b, c\}$, 写出下面关系的集合表达式和关系矩阵.



6. 给出集合 $\{1, 2, 3, 4\}$ 上的关系, 它们分别具有如下性质:

- (1) 自反、对称、不传递.
- (2) 不是自反的、对称、传递.
- (3) 自反、反对称、不传递.
- (4) 自反、对称、传递.
- (5) 自反、反对称、传递.

4 中国科学技术大学代数结构 2021 年期末试题

1. (16 分)

(1) 求解下列同余方程组:

$$\begin{cases} x \equiv 1 \pmod{5}, \\ x \equiv 5 \pmod{6}, \\ x \equiv 4 \pmod{7}, \\ x \equiv 10 \pmod{11}. \end{cases}$$

(2) 计算 $\Phi(7800)$.

2. (12 分) 设集合 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, R 是集合 A 上的关系,

$$R = \{(1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 4), (4, 1)\}.$$

求 R 的传递闭包和 R^2 .

3. (15 分) $\mathbb{R}^*$ 是非零实数集合, $x, y \in \mathbb{R}^*$, 定义 $\mathbb{R}^*$ 上的关系 S :

$$xSy \iff x \cdot y > 0.$$

(1) 证明: S 是 $\mathbb{R}^*$ 上的等价关系, 并写出所有等价类.

(2) 如果将 $\mathbb{R}^*$ 改为实数集合 $\mathbb{R}$, 那么 S 还是 $\mathbb{R}$ 上的等价关系吗? 为什么?

4. (15 分) 对部分序集 $(\{3, 5, 9, 15, 24, 45\}, |)$, 回答以下问题:

(1) 画出 Hasse 图, 求出极大元和极小元, 并判断是否存在最大元和最小元吗.

(2) 给出 $\{3, 5\}$ 的所有上界, 若存在, 求出 $\{3, 5\}$ 的最小上界.

(3) 给出 $\{15, 45\}$ 的所有下界, 若存在, 求出 $\{15, 45\}$ 的最大下界.

5. (11 分) 设 H 是群 G 的非空子集. 证明: H 是 G 的子群的充分必要条件是: 对任意的 $a, b \in H$, 有 $a^{-1}b \in H$.

6. (11 分) 设 f 是群 G 到群 G' 的同构映射, $b \in G$. 证明: b 与 $f(b)$ 同阶.

7. (10 分) 证明: 具有 3 个或更多元素的链 (线性序集) 不是有补格.

8. (10 分) 设 f 是环 R 到环 R' 的同态满射, I 是 R 的理想. 证明:

$$f(I) = R' \iff I + \ker f = R.$$

5 中国科学技术大学代数结构 2022 年期末试题

1. (8 分) 求解线性同余方程: $21x \equiv 39 \pmod{117}$.

2. (13 分) 设 $m \geq 2, a$ 为正整数, 且 $(m, a) = 1$. 证明:

(1) 存在正整数 $d \leq m - 1$, 使得: $md \equiv 1 \pmod{a}$.

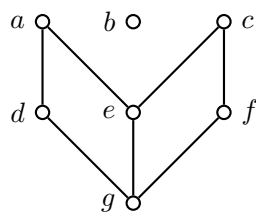
(2) 设 d_0 是满足 (1) 的最小正整数 d , 则 $m \mid a^h - 1$ ($h \geq 1$) 的充要条件是 $d_0 \mid h$.

3. (12 分)

(1) 计算置换的乘积: $(12345)(23)$.

(2) 写出三次对称群 S_3 的所有子群; 写出 S_3 关于子群 $H = \{(1), (23)\}$ 的所有左陪集.

4. (8 分) 已知某部分序集 (A, ρ) 的 Hasse 图如下图所示, 分别写出集合 A 和部分序 ρ 的表达式, 并求部分序集 (A, ρ) 的最大元、最小元、极大元、极小元.



5. (8 分) 设偏序集 $(A, R), (B, S)$, 定义 $A \times B$ 上的二元关系 T :

$$(x, y)T(u, v) \iff xRu \wedge ySv.$$

证明 T 为偏序关系.

6. (12 分) 设 H 是群 G 的正规子群, $g \in G$ 的任一元素, 证明: 若 g 的阶与 G/H 互素, 则 $g \in H$.

7. (8 分) 设 G 和 G' 分别是阶数为 m 和 n 的循环群 ($m \geq n$), 则 $f: G \rightarrow G'$ 的满同态映射的充要条件是 $n \mid m$.

8. (15 分) 设 $\mathbb{Z}[x]$ 为多项式环, (n) 表示 $\mathbb{Z}[x]$ 的主理想, 且 $n \geq 2$, 证明:

(1) $\mathbb{Z}[x]/(n) \cong (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})[x]$.

(2) $\mathbb{Z}[i]/(1+i) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

9. (10 分) 设 R 为环, $I_1, I_2, \dots, I_n$ 为 R 的理想, 当 $i \neq j$ 时, $I_i + I_j = R$. 证明:

$$I_1 + I_2 I_3 \cdots I_n = R.$$

6 中国科学技术大学代数结构 2023 年期末试题

1. (14 分) 解下列同余方程组:

$$\begin{cases} x \equiv 1 \pmod{5} \\ x \equiv 3 \pmod{7} \\ x \equiv 9 \pmod{11} \end{cases}$$

2. (10 分) 设 $m, n \in \mathbb{N}^*$ 且 $\gcd(m, n) = 1$, 求证: $m^{\varphi(n)} + n^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{mn}$.

3. (10 分) 给定置换 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 5 & 4 & 6 & 1 \end{pmatrix}, \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 3 & 2 & 1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$, 求 $\sigma\tau, \sigma^2\tau, \tau^{-1}\sigma\tau$.

4. (10 分) R 是定义在 $A \times A$ 上的二元关系, 其中 A 是自然数集 $\mathbb{N}$ 的子集, $(a, b) \stackrel{R}{\sim} (c, d)$ 当且仅当 $a + d = b + c$.

(1) 求证 R 是 $A \times A$ 上的等价关系.

(2) 当 $A = \{1, 2, 3\}$ 时, 求商集 $(A \times A)/R$.

5. (14 分) 证明下列命题:

(1) 设 G 是一个有限群, 证明 G 中阶大于 2 的元素个数为偶数.

(2) 在 (1) 的条件下加上 $|G|$ 为偶数, 证明 G 中必有 2 阶元.

6. (10 分) G 为一个群, 证明 G 没有非平凡子群当且仅当 $G = \{e\}$ 或 G 为素数阶循环群.

7. (12 分) 设 H 是群 G 的正规子群, 且 $[G : H] = m$, 求证: $\forall x \in G, x^m \in H$.

8. (12 分) 设 G 为一个群, 定义 G 的中心 $Z(G)$ 为: $Z(G) = \{x \in G \mid \forall g \in G, xg = gx\}$.

(1) 证明 $Z(G)$ 是 G 的正规子群.

(2) 若 G 是交换群, 证明 $Z(G) = G$.

(3) 若 $G/Z(G)$ 是循环群, 证明 $Z(G) = G$.

9. (8 分) 设 R 是一个环, S 是 R 的子集, 而 I 是 R 的理想且 $I \subset S$.

(1) 若 S 是 R 的子环, 证明 S/I 是 R/I 的子环.

(2) 若 S 是 R 的理想, 证明 $(R/I)/(S/I) = R/S$.

7 中国科学技术大学代数结构 2024 年期末试题

1. (10 分) 证明:2 是 13 的一个原根, 并解同余方程 $4x^9 \equiv 7 \pmod{13}$.
2. (10 分) 已知 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 上二元关系 $R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 3), (2, 5)\}$.
 - (1) R 具有哪些性质?
 - (2) 求 R 的自反闭包、传递闭包和 R^2 .
3. (15 分)
 - (1) 设 m 是正整数, a 和 b 是整数, 如有整数 $d \geq 1$, 则 $a \equiv b \pmod{m} \Leftrightarrow da \equiv db \pmod{dm}$.
 - (2) 证明: 若 m 与 n 互素, 则 $m^{\varphi(n)} + n^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{mn}$.
4. (10 分) 对每个正整数 n , 用 S_n 表示 n 的所有正因子的集合, 例如 $S_6 = \{1, 2, 3, 6\}$. 则:
 - (1) 证明 $\langle S_n, | \rangle$ 是格.
 - (2) 对于 $n = 4, 6, 8, 12$, 试给出 $\langle S_n, | \rangle$ 的哈斯图.
 - (3) 当 n 为何值时, $\langle S_n, | \rangle$ 是线性序, 为什么?
5. (15 分) 设 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $\langle P(A), \oplus \rangle$ 构成群, 其中 $P(A)$ 是集合 A 的幂集, $\oplus$ 为集合的对称差.
 - (1) 求群 $\langle P(A), \oplus \rangle$ 的单位元, 以及 $P(A)$ 中任意元素的逆元.
 - (2) 求解群方程: $\{1, 3\} \oplus X = \{3, 4, 5\}$.
 - (3) 令 $B = \{1, 4, 5\}$, 求由 B 生成的循环子群 $\langle B \rangle$.
6. (10 分) 设 $\langle R, +, \cdot \rangle$ 是 Z 上 2 阶矩阵环, A 是元素为偶数的所有 2 阶矩阵组成的集合, 证明 A 是 $\langle R, +, \cdot \rangle$ 的理想, 并求商环 R/A 的阶.
7. (10 分) 设 f 是群 G_1 到某个交换群 G_2 的群同态, H 是 G_1 的子群. 证明: 若 H 包含 $\ker f$, 则 H 是 G_1 的正规子群.
8. (10 分) 证明: 奇数阶群所有元素之积等于单位元.
9. (10 分) 设群 G 只含有有限多个子群, f 是 G 到自身的满同态, 证明 f 是 G 的自同构.

8 中国科学技术大学代数结构 2026 年期末试题

1. (14 分)

(1) (8 分) 解同余方程组.

$$\begin{cases} x \equiv 3 \pmod{5}, \\ x \equiv 5 \pmod{8}, \\ x \equiv 10 \pmod{11}. \end{cases}$$

(2) (6 分) 计算 $\varphi(420)$, 并利用 Euler 定理求 11^{1250} 除以 420 的余数.

2. (10 分) 设

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 1 & 6 & 7 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad \tau = (1\ 5\ 7)(2\ 4).$$

求 $\sigma\tau$ 、 $\sigma^2\tau$ 、 $\tau^{-1}\sigma\tau$, 并将结果写成不相交轮换之积. (注: 置换乘法按映射复合顺序, $\sigma\tau = \sigma \circ \tau$, 即先作用 τ , 再作用 σ .)

3. (10 分) 设 $A = \{a, b, c, d\}$, A 上的二元关系 $R = \{(a, a), (a, b), (b, c), (c, b), (c, d)\}$.

(1) 判断 R 是否具有自反性、对称性、反对称性、传递性, 并分别说明理由.

(2) 求 $R \circ R$.

(3) 求 R 的自反闭包 $r(R)$ 与对称闭包 $s(R)$. (注: 关系复合按如下定义: $(x, z) \in R \circ S \iff \exists y, (x, y) \in S, (y, z) \in R$.)

4. (12 分) 设 $A = \{2, 3, 4, 6, 8, 12, 18, 24\}$, 在 A 上以整除关系 $|$ 为偏序.

(1) 画出偏序集 $\langle A, | \rangle$ 的 Hasse 图.

(2) 求 A 的极大元、极小元, 判断是否存在最大元、最小元.

(3) 求 $\{4, 6\}$ 的所有上界, 若存在, 求其最小上界.

(4) 求 $\{8, 12\}$ 的所有下界, 若存在, 求其最大下界.

5. (12 分) 设 G 为有限群.

(1) 证明 G 中阶大于 2 的元素个数为偶数.

(2) 若 $|G|$ 为偶数, 证明 G 中存在 2 阶元.

6. (10 分) 设 $G = \langle a \rangle$ 是 36 阶循环群.

(1) 求 a^8 的阶.

(2) 列出由 a^8 生成的子群.

(3) 求 G 中所有 12 阶子群, 并说明共有几个.

7. (12 分) 设 $\langle G, * \rangle$ 是群, 单位元为 e . 设 H 和 K 分别是 G 的正规子群, 且 $H \cap K = \{e\}$. 令 $L = \{h * k \mid h \in H, k \in K\}$.

(1) 证明对任意 $h \in H, k \in K$, 都有 $h * k = k * h$.

(2) 证明 L 是 G 的正规子群.

(3) 证明 $L/H \cong K$.

8. (10 分) 设 $\langle G, * \rangle$ 是群, 单位元为 e . 定义 G 的中心 $Z(G) = \{z \in G \mid \forall g \in G, z * g = g * z\}$.

(1) 证明 $Z(G)$ 是 G 的正规子群.

(2) 若商群 $G/Z(G)$ 是循环群, 证明 G 是交换群.

9. (10 分) 设 $Z_3 = \langle \{[0], [1], [2]\}, +, \cdot \rangle$ 是模 3 的剩余类环, $Z_3[x]$ 是 Z_3 上的多项式环. 定义映射 $\Phi: Z_3[x] \rightarrow Z_3 \times Z_3$, $\Phi(f(x)) = (f([1]), f([2]))$, 其中右端按分量作加法和乘法.

(1) 证明 Φ 是满环同态映射.

(2) 证明 $Z_3[x]/(x^2 - [1]) \cong Z_3 \times Z_3$, 其中 $(x^2 - [1])$ 是由 $x^2 - [1]$ 生成的理想.