

7 组合学试题

7.1 2022 年, 期中

问题 7.1.1. 证明如下的恒等式:

1.

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i}^2 = \binom{2n}{n}.$$

2.

$$\sum_{i=0}^{20} (-1)^i \binom{50}{i} \binom{50-i}{20-i} = 0.$$

问题 7.1.2. 某校的数学系有 n 位教授和 $2n$ 门课程. 每一个学期中每一位教授负责教授两门课. 在秋季学期, 有多少种分配课程的办法? 在次年的春季学期, 若教授们都不想教与秋季完全相同的两门课, 有多少种分配课程的办法?

问题 7.1.3. 设 Ω 是背景集合, 令 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 是 n 个任意子集. 令 T 是以 $[n]$ 为顶点集的任意树. 证明如下的等式恒成立:

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{ij \in E(T)} |A_i \cap A_j|.$$

此处 $ij \in E(T)$ 指的是 T 上连接点 i 和 j 的边.

问题 7.1.4. 证明对任意的 $k \geq 2$, 存在 $n_0 = n_0(k)$ 使得任意 $[n_0]$ 的 k -染色包含三个不同的数字 $1 \leq a, b, c \leq n_0$, 其同色并满足 $a \cdot b = c$.

问题 7.1.5. 证明如下陈述:

1. 证明任意的二部图存在一个能够覆盖一个部中最大度数点的配对.
2. 一个 $n \times n$ 的表格填满了 0 和 1, 且这填法满足: 任选 n 个两两不同行且两两不同列的格子, 则至少有一个格子含有 1. 证明: 可以找到 i 个行, j 个列, 使得 $i + j \geq n + 1$ 且它们的交只含有 1.

问题 7.1.6. n 元集合 X 的子集族 $\mathcal{B}$ 称为是 Cross-Cut 的, 若任意 X 的子集可以和 $\mathcal{B}$ 中至少一个元素比较 (即: 包含或被包含). 设 $\mathcal{B}$ 是极小 Cross-Cut (即: $\mathcal{B}$ 是一个 Cross-cut 但任意真子集都不是 Cross-Cut), 证明:

$$|\mathcal{B}| \leq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}.$$

提示: 基于 $\mathcal{B}$ 构造独立系.

7.2 2023 年, 期中

问题 7.2.1 ((20')). 证明:

$$n \binom{2n-1}{n-1} = \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k}^2.$$

证明. 见 (算两次办法) 或 7 (二项式办法) □

问题 7.2.2 ((20')). 命数列 $\{h(n)\}$ 为长 n 的, 完全由 A, B, C 组成的字符串的个数, 且其中没有任何的 B 紧跟在 A 后面 (即不存在字段 AB). 求 $h(n)$ 的闭式生成函数.

问题 7.2.3 ((20')). 设 G 是简单图, K_n 是 n -完全图.

1. 若 $|V(G)| = 5$, 证明 G 或其补图至少有一个有圈.
2. 对 K_n 的边集以红蓝两色染色, 证明其存在纯色的生成树.

问题 7.2.4 ((20')). 对 $[n]$ 的一排列 $p \in S_n$, 称 p 在第 i 个位置上“下降”, 当且仅当 $p(i) > p(i+1)$. 给定 $1 \leq a_1 < a_2 < \cdots < a_m \leq n$, 利用容斥原理计算 $[n]$ 的在且仅在所有 a_i 处“下降”排列的数量. (这是一个冗长而缺乏洞见的式子, 几乎看一眼式子的构成就能让人猜到这道题的做法)

问题 7.2.5 ((20')). 回忆: Konig 定理指的是在二部图 G 中, 最大的匹配数等于最小的顶点覆盖数. 用 Hall 定理证明 Konig 定理.

问题 7.2.6 ((Bonus 10')). 集合 $P \subseteq S_n$ 称为是逐对完备的, 若任意的二元组 $(i, j), i \neq j, i, j \in [n]$, 都存在 $\sigma \in P$ 使得在 σ 的循环表示中, i 在 j 前面. (i 在 j 前面的意思指的是, 比如 $(1324) \in S_4$, 则 3 在 2 前面, 4 在 1 前面) 进一步, P 称为极小的, 若 P 的任意真子集不是逐对完备的. 证明: 对任意的极小逐对完备集合 $P \subseteq S_n$, 有 $|P| \leq \lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor, \forall n \geq 4$.

7.3 2024 年, 期中

本卷满分 140 分, 1 和 10 各 10 分, 其余各 15 分.

问题 7.3.1. 证明:

$$\sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \binom{n+k}{m} = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \binom{n}{k} 2^k.$$

问题 7.3.2. 我们扩充 Ramsey 数的定义. 对两个图 G_1, G_2 , 记 $R(G_1, G_2)$ 是满足二染色的 K_v 中都有一个红色的 G_1 或一个蓝色的 G_2 的最小的 v . 证明: $R(C_4, C_4) = 6$.

问题 7.3.3. 今有两个 $[mn]$ 的分割, $\{A_i\}_{i=1}^m, \{B_j\}_{j=1}^m$, 使得 $|A_i| = |B_j| = n, \forall i, j \in [n]$. 证明: 存在一个置换 $\sigma \in S_m$ 使得 $A_i \cap B_{\sigma(i)} \neq \emptyset, \forall i \in [m]$.

问题 7.3.4. 计数: $[2n]$ 中满足 $x_i + x_{i+1} \neq 2n+1, \forall i \in [2n-1], x_1 + x_{2n} \neq 2n+1$, 满足这样的排序数有多少?

问题 7.3.5. 令 $\mathcal{F}$ 是 $[n]$ 的形成一条反链的子集族, 且任意的 $A \in \mathcal{F}$ 都有 $|A| \leq k$. 证明: $|\mathcal{F}| \leq \binom{n}{k}$.

问题 7.3.6. 今可同时跨一级台阶或两级台阶. 令 A_n 为跨越 n 级台阶的方式数, 给出其生成函数 $\sum_{n \geq 1} A_n x^n$ 的闭形式.

问题 7.3.7. 给出闭形式:

$$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{7} \rfloor} \binom{n}{7k}.$$

问题 7.3.8. 令 S 是平面上的 n 个点的集合, 且不存在三点共线. 进一步, 任意的 $v \in S$, 存在至少 k 个 S 中的点与 v 等距. 证明 $k < \frac{1}{2} + \sqrt{2n}$.

问题 7.3.9. 证明存在仅与 k 有关的 $C = C(k)$ 满足

$$\text{ex}(n, K_{k,k}) \leq Cn^{2-\frac{1}{k}}.$$

问题 7.3.10. 令 $K_n - \{e\}$ 为删去一条边的完全图. 证明 $K_n - \{e\}$ 的生成树的数目为 $(n-2)n^{n-2}$.

7.4 2016 年, 期末

1. Find the coefficient of x^n in the product

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{6^{k-1}}\right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k 6^{n-k} \binom{n}{k} x^k\right),$$

where $n > 0$ is an integer. Your answer should be in closed form.

2. Let $t \geq 2$ be a fixed integer. Let $S_1, S_2, \dots, S_n$ be n subsets of $[n]$ such that for any $1 \leq i < j \leq n$, we have

$$|S_i \cap S_j| \leq t - 1.$$

Prove that there exist some set S_i and some absolute constant C satisfying that $|S_i| \leq C\sqrt{t \cdot n}$.

3. How many permutations π of $[2n]$ are there so that no odd number is mapped to itself?

4. Let $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ where $x_i \in \mathbb{R}$ for each $i \in [n]$. A subset S of X is called ****nonnegative**** if the sum of the elements contained in S is nonnegative. Find the minimum number of nonnegative subsets of $X = \{x_1, \dots, x_n\}$, subject to the condition that

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n \geq 0.$$

And then give an example which achieves this minimum.

For example, if $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ with $x_1 = -4, x_2 = 1$ and $x_3 = 4$, then the nonnegative subsets are:

$$\{x_2\}, \{x_3\}, \{x_1, x_3\}, \{x_2, x_3\}, \{x_1, x_2, x_3\}.$$

5. Let $n \geq 3$. Prove that any n -vertex graph G with at least $\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor + 1$ edges contains at least $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ triangles.

7.5 2020 年, 期末

问题 7.5.1. 设 $a_1, \dots, a_n \in [n]$, 且 $\forall I \in 2^{[n]}, \sum_{i \in I} a_i$ 都不是 $n+1$ 的倍数. 证明: $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

问题 7.5.2. 设 $A_i \subseteq [n], i = 1, 2, \dots, N$. 存在 $t > 0$, 使得 $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |A_i| \geq \frac{n}{t}$, 当 $N \geq 2t^2$ 时, 证明: 存在 $i \neq j$, 使得

$$|A_i \cap A_j| \geq \frac{n}{2t^2}.$$

问题 7.5.3. 设 $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n \in \mathbb{R}^n$, 且 $|\vec{v}_i| \leq 1$. 对 $\vec{w} = \sum_{i=1}^n p_i \vec{v}_i$, 其中 $p_i \in [0, 1]$. 证明: 存在 $\varepsilon_i \in \{0, 1\}$, 使得

$$\left| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \vec{v}_i - \vec{w} \right| \leq \frac{\sqrt{n}}{2}.$$

问题 7.5.4. 暂缺.

问题 7.5.5. 设 $\mathfrak{A} \subseteq \{0, 1, 2\}^n$. 对 $\mathfrak{A}$ 中任两个不同的 $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n), \vec{b} = (b_1, \dots, b_n)$, 存在 i , 使得 $a_i - b_i \equiv 1 \pmod{3}$. 证明: $|\mathfrak{A}| \leq 2^n$.

问题 7.5.6. 在有限射影平面 (X, C) 中一个集合 A 称作 **Blocking** 集, 当且仅当 C 中任一条线与 A 有至少一个交点. 试证明: 在一个 order 为 q 的有限射影平面 (FPP) 中一个大小为 $q+1$ 的集合是 **blocking** 集当且仅当它是一条线.

问题 7.5.7. (Bonus) 若一个树有 $2k$ 个点的度数是奇数, 证明其可以被拆分为 k 个边不交的路的并集.

7.6 2023 年, 期末

问题 7.6.1. 1. 已知 $v \in [22, 34]$, 且存在设计 $(v, 6, 1)$. 求证: $v = 31$.

2. 给出 $PG(3)$ 与 $AG(3)$ 的 explicit construction.

问题 7.6.2. 今有非空子集族 F . 若 F 中的元素满足:

- 若 $A \in F, A \subseteq B$, 则 $B \in F$;
- 对每个子集 A , A 与 A^c 中恰好有一个在 F 中;

则称这样的子集族为 X 上的一个超滤 (ultrafilter). 证明: 一个超滤一定是一个相交系, 而一个相交系一定包含于某个超滤

问题 7.6.3. 设 $a_1, \dots, a_n; b_1, \dots, b_n$ 均为不超过 n 的正整数. 证明: 存在非空指标集 $I, J \subseteq [n]$, 使得

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{j \in J} b_j.$$

问题 7.6.4. 设正整数 $k \geq 3$, F 是 $[n]$ 上的一个 k -均匀子集族 (即: $\forall A \in F, |A| = k$) 证明: 若 $|F| \leq \frac{3^{k-1}}{2^k}$, 则存在一个对 $[n]$ 中元素的 3-染色, 使得 $\forall A \in F, A$ 中含有每种不同颜色的元素.

问题 7.6.5. 设 $A_1, \dots, A_m$ 均为 $[m]$ 的子集, $m > n$. 证明: 存在指标集 $I, J \subseteq [m]$, 使得 $I \cap J = \emptyset, I \cup J \neq \emptyset$, 使得

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup_{j \in J} A_j.$$

问题 7.6.6. 证明: 存在常数 c , 使得对任意正整数 n , 存在一个 C_{100} -free 的 n 阶图 G , 满足

$$e(G) \geq c \cdot n^{100/99}.$$

问题 7.6.7. 对偏序集 $(P, \leq)$, 定义二分图 $G = \langle X \cup Y, E \rangle$, 其中 $X = \{x_a : a \in P\}, Y = \{y_a : a \in P\}, x_a y_b \in E$ 当且仅当 $a > b$.

利用 Konig 定理证明: 在偏序集 $(P, \leq)$ 中, 存在一条反链 A 以及一个对 $(P, \leq)$ 的 Hasse 图中边的划分 $C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_m$, 其中 C_i 均为链, 且满足 $|A| = m$.

7.7 2024 年, 期末

问题 7.7.1 ((15')).

1. 取以 $[6]$ 为顶点的 K_6 , 给出所有边分为 4 个三角形和一个匹配的分拆.
2. 证明任意满足 $2k < \lambda$ 的对称 (v, k, λ) 设计, 都有 $k > 2\lambda$.

证明. 考虑. □

问题 7.7.2 ((20')). 令 $n \geq t$, 考虑子集族 $\mathcal{F} \subseteq 2^{[n]}$ 其不包含任意长超过 t 的链 (即不存在 $\{F_i\}_{i=0}^t$ 使得 $F_0 \subseteq F_1 \subseteq \dots \subseteq F_t$). 对 $[n]$ 的循环置换 π , 令 $\mathcal{F}_\pi$ 表示所有 $\mathcal{F}$ 中接连出现在 π 中的元素.

1. 证明:

$$\sum_{A \in \mathcal{F}_\pi} \frac{1}{|A|!(n-|A|)!} \leq \sum_{i=1}^t \frac{n}{k_i!(n-k_i)!},$$

对任意 $[n]$ 的循环置换 π 均成立;

2. 证明:

$$|\mathcal{F}| \leq \sum_{i=1}^t \binom{n}{k_i}.$$

其中, $k_1, k_2, \dots, k_t$ 是使得 $\binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \dots, \binom{n}{k_t}$ 为最大的 t 个二项式系数.

问题 7.7.3 ((20')). 考虑 $\mathcal{F} \subseteq \binom{[n]}{3}$ 是子集族, 且每一个 $[n]$ 中的元素都在 d 个 $\mathcal{F}$ 的子集中. 证明: 存在 $S \subseteq [n], |S| = \frac{2n}{3\sqrt{d}}$, 使得 S 不包含任一个 $\mathcal{F}$ 中的子集.

问题 7.7.4 ((15')). 本题考察球面上的 2-距集. 定义 $\mathbb{S}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$. 一个球面 2-距集指的是 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上的 2-距集. 证明: 若 $m_s(n)$ 代表球面 2-距集的最大点数, 则

$$\binom{n+1}{2} \leq m_s(n) \leq \frac{n(n+3)}{2}.$$

问题 7.7.5. 令 m 是正整数, 找到满足下面性质的有限偏序集 P , 或证明这样的 P 不存在.

“ P 中的最长链有 m 个元素, 同时 P 可被写为两条不交的链 C_1, C_2 , 但以这样写出的 C_i 不能有 m 个元素.”

问题 7.7.6 ((10')). 令 $\mathcal{F} \subseteq \binom{[n]}{k}$ 是极大的相交系, 即: 任意的 $E \in \binom{[n]}{k} - \mathcal{F}$, 集族 $\mathcal{F} \cup \{E\}$ 不再是相交族. 证明:

$$|\mathcal{F}| \geq \frac{\binom{n}{k}}{1 + \binom{n-k}{k}}.$$

问题 7.7.7 ((Bonus, 10')). 今有图 G 其染色数为 $\chi(G) = k$. 证明: 对任意的恰当染色 $c: V(G) \rightarrow [k]$, 存在一条路径 $v_1 - v_2 - \cdots - v_k$ 使得 $c(v_i) = i$.