

中国科学技术大学

2023—2024学年第一学期期末试卷

考试科目 时间序列分析 得分

所在系 姓名 学号

考试时间: 2024年1月11日14:30—16:30

一. (32分) 填空选择题(每题只有1空的每空3分, 有2空的每空2分, 3空每空1分答案请写在答题纸上):

1. $\{X_t\}$ 为ARMA(1, 1)模型 $X_t = \phi X_{t-1} + \epsilon + \theta \epsilon_{t-1}$ ($|\phi| < 1$ 且 $\epsilon \sim WN(0, \sigma^2)$), 记 γ_k 为过程 $\{X_t\}$ 的自协方差函数则 $\gamma_0 =$, $\gamma_h =$ ($h \geq 1$).

2. 考虑季节模型 $ARIMA(0, 0, 1) \times (0, 0, 1)_{12}$

$$X_t = (1 + \theta_1)(1 + \theta_{12})\epsilon_t, \quad \epsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$$

计算其自相关系数 $\rho_1 =$, $\rho_{11} =$

3. 增广的Dickey—Fuller检验是用来检验

A. 正态性 B. 平稳性 C. 可逆性 独立性

4. 设ARMA(1, 2): $X_t = 0.5X_{t-1} + \epsilon_t - 0.1\epsilon_{t-1} + a\epsilon_{t-2}$, 当 a 满足 时, 模型可逆的.

5. 令 Z_1, Z_2 为独立的正态分布随机变量, 均值为0, 方差为 σ^2 , λ 为实数。定义过程 $X(t) = Z_1 \cos \lambda t + Z_2 \sin \lambda t$ 。 $X(t)$ 的均值函数 和协方差函数 是 过程 (严、宽)。

6. 考虑一简单随机游走序列 $X_t = X_{t-1} + \epsilon_t, \epsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$, 则其自相关系数 $\rho_t(k) = Corr(X_t, X_{t-k})$ 为, $\rho_1(1)$ $\rho_{99}(1)$ ($>, <$)

7. 零均值平稳列 X_t 满足 称为非决定性序列, 非决定性序列平稳列满足 称为纯非决定的.

8. 10. 设 $\{X_t, t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ 是满足MA(q) 模型

$$X_t = \mu + \epsilon_t + \theta_1 \epsilon_{t-1} + \dots + \theta_q \epsilon_{t-q}$$

的MA (q) 序列, 则已知 $X_t, X_{t-1}, X_{t-2}, \dots$ 时, X_{t+l} 的最佳线性预测 $\hat{X}_t(l)$ 的均方误差为 ($l \leq q$)

二. 平稳过程AR(3): $X_t = 0.6X_{t-3} + \epsilon_t, \quad \epsilon_t \sim WN(0, 1)$.

(1) 求过程 X_t 的谱密度 $f_X(\lambda)$.

(2) γ_k 为上述过程 X_t 的协方差函数, 求

$$Y_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \gamma_j X_{t-j}$$

的谱密度.

三. (20分) 考虑如下GARCH(1,1)

$$\begin{aligned} \epsilon_t &= \sigma_t \nu_t, \quad \nu_t \stackrel{i.i.d.}{\sim} N(0, 1), \\ \sigma_t^2 &= \omega + \alpha \epsilon_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2, \quad \omega > 0, \alpha \geq 0, \beta \geq 0, \alpha + \beta < 1. \end{aligned}$$

(1) 验证 $\{\epsilon_t^2\}$ 满足非中心的ARMA(1,1)

$$\epsilon_t^2 = \omega + (\alpha + \beta) \epsilon_{t-1}^2 + \eta_t - \beta \eta_{t-1}.$$

(2) 计算

$$\sigma_\eta^2 \equiv E[\eta_t^2] = \frac{2\phi_0}{1 - \phi_1} < \infty$$

with

$$\phi_0 = \frac{\omega^2(1 + \alpha + \beta)}{1 - \alpha - \beta} \quad \text{and} \quad \phi_1 = 3\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2.$$

四. (18分) 考虑零均值的平稳序列 $\{X_t, t = 0, 1, \dots\}$, 其协方差函数记为 γ_n 满足 $\gamma_0 > 0$, 当 $n \rightarrow \infty$ 时 $\gamma_n \rightarrow 0$, 为计算偏相关系数 a_{nn} ,

$$X_{n+1} = a_{n1}X_n + \dots + a_{nn}X_1 + \epsilon_{n+1}, \quad \hat{X}_{n+1} = L(X_{n+1}|X_n, \dots, X_1),$$

预报误差为 $\sigma_n^2 = E(X_{n+1} - \hat{X}_{n+1})^2$, 请利用递推的方式来推导Levinson算法:

(1). 利用第 n 步的预测情况, 推导第 $n+1$ 步, 记 $\tilde{X}_1 = L(X_1|X_{n+1}, \dots, X_2)$, 验证

$$\hat{X}_{n+2} = a_{n1}X_{n+1} + \dots + a_{nn}X_2 + \lambda(X_1 - \tilde{X}_1),$$

并求出 λ .

(2) 利用(1)得出levinson递推公式

$$\begin{aligned} a_{n+1,n+1} &= \lambda, \\ a_{n+1,j} &= a_{nj} - \lambda a_{n,n+1-j}, \\ \sigma_{n+1}^2 &= \sigma_n^2(1 - \lambda^2). \end{aligned}$$

五. (15分) 设 $\{X_t, t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ 是满足AR(2) 模型

$$X_t = \frac{1}{25}X_{t-2} + \varepsilon_t$$

(1). 求出 X_t 的因果形式(用 ε_t 表示 X_t).

(2). 试求已知 $X_t, X_{t-1}, X_{t-2}, \dots$ 时, X_{t+l} 的最佳线性预测 $\hat{X}_t(l), l = 1, 2, \dots$. 并求出 $\hat{X}_t(l)$ 的均方误差 $E[e_t(l)^2], l = 1, 2, \dots$.