

中国科学技术大学

2022—2023学年第一学期期末试卷

考试科目 时间序列分析 得分 _____

所在系 _____ 姓名 _____ 学号 _____

考试时间: 2023年2月27日8:30—10:30

一. (32分) 填空选择题(每题只有1空的每空3分, 有两空的每空2分, 3空没空1分答案请写在答题纸上):

1. $\{X_t\}$ 为零均值方差为1的独立同分布的随机序列, 随机序列 $Z_t = \begin{cases} X_t, & t \text{ 为偶数} \\ Z_{t-1}, & t \text{ 为奇数} \end{cases}$ 则自协方差函数 $\gamma_k(Z_t, Z_{t+k}) = \underline{\hspace{2cm}}$, 则 $\{Z_t\}$ 是个_____序列.
(平稳、非平稳)

2. 设 $X_t = 2Z_{t-1} + Z_{t-1} + \varepsilon_t$, 其中 $\{Z_t\}$ 与 $\{\varepsilon_t\}$ 为两两不相关的白噪声序列, 均值为0方差为 σ^2 则 $\{X_t\}$ 的自协方差为 $\gamma_k(X_t, X_{t+k}) = \underline{\hspace{2cm}}$, 而序列 $\{X_t\}$ 与 $\{Z_t\}$ 的 k 阶相关系数 $\rho_{XZ}(k) = \text{Corr}(X_t, Z_{t+k}) = \underline{\hspace{2cm}}$ ($k = 1, 2, \dots$).

3. 随机序列 $\{Y_t\}$ 满足下列等式, 则属于 $\{Y_t\}$ _____模型

$$(1 - L)(1 - L^4)(1 - 0.4L^4)Y_t = (1 + 0.2L)(1 + 0.8L^4)\varepsilon_t, \varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$$

- A) ARIMA(1, 1, 1) $\times$ (1, 0, 1)₄ B) ARIMA(0, 1, 1) $\times$ (1, 1, 1)₄
C) ARIMA(1, 0, 1) $\times$ (1, 0, 1)₄ D) ARIMA(1, 1, 0) $\times$ (1, 1, 1)₄

4. 设ARMA(2, 1): $X_t = 0.5X_{t-1} + aX_{t-2} + \varepsilon_t - 0.1\varepsilon_{t-1}$, 当 a 满足_____时, 模型平稳.

5. 考虑ARCH(1)模型 $\varepsilon_t = v_t \sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2}$, 其中 v_t 为高斯白噪声序列 $WN(0, 1)$. 则 ε_t 的方差为_____.

6. 某一观测值序列最后4期的观测值为 $x_{t-3} = 5$, $x_{t-2} = 5.4$, $x_{t-1} = 5.8$, $x_t = 6.2$, 使用4期移动平均法预测 $\hat{x}_{t+2}$ _____.

7. γ_k 是因果AR(p)序列 X_t 的协方差函数, $f(\lambda)$ 是 X_t 的谱密度, 则

$$Y_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \gamma_j X_{t-j}$$

的谱密度为_____.

8. 为了判断一个平稳序列中是否含有信息, 是否可以继续分析, 需要对该序列进行_____检验, 该检验用到的统计量是_____分布. 原假设为_____.

9. 设AR(p)模型

$$X_t = \phi_0 + \phi_1 X_{t-1} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + \epsilon_t$$

的传递形式为 $X_t = \mu + \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k \epsilon_{t-k}$, 则 $\sum_{k=0}^{\infty} \psi_k (\frac{1}{2})^k =$ _____.

10. AR(2)模型, 设自相关系数为 $\rho_1 = 0.6, \rho_2 = 0.5$. 则2阶偏自相关系数 $\phi_{22} =$ _____.

二. (15分) 设 $\xi(t) = A \cos(\lambda t + \Theta)$, 其中相角 Θ 为 $(-\pi, \pi)$ 内均匀分布的随机变量, λ 为与 Θ 相互独立的随机变量, 概率密度为 $f_\lambda(x)$. A 为确定性常数。

(1) 求证 $\{\xi(t)\}$ 是平稳过程.

(2) 求证 $\xi(t)$ 的功率谱密度为

$$S_\xi(\omega) = \frac{A^2 \pi}{2} [f_\lambda(\omega) + f_\lambda(-\omega)]$$

三. (20分) 考虑如下的时间序列模型ARMA(1,2)

$$X_t = 0.8X_{t-1} + \epsilon_t + 0.7\epsilon_{t-1} + 0.6\epsilon_{t-2}, \quad \epsilon_t \sim WN(0, \sigma^2),$$

(1) 写出 k 阶自相关系数 $\rho_k, k \geq 0$ 满足的递推式.

(2) 说明该序列的因果性和可逆性.

(3) 如果是可逆的, 写出该模型的可逆形式.

四. (18分) 考虑如下的时间序列模型AR(2)

$$X_t = \frac{1}{16}X_{t-2} + \epsilon_t, \quad \epsilon \sim WN(0, \sigma^2)$$

1) 已知 $X_t, X_{t-1}, \dots$ 时, X_{t+l} 的最佳线性预测 $\hat{X}_t(l)$.

2) 试求1)中 $\hat{X}_t(l)$ 的均方误差 $E[e_t(l)^2], l = 1, 2, \dots$ (用 $\{X_t, t = \pm 1, \pm 2, \dots\}$ 的自协方差函数表示).

(3) 试求极限 $\lim_{t \rightarrow \infty} E[e_t(l)^2]$.

五. (15分) 考虑平稳(因果)AR(3)模型

$$X_t = 0.9X_{t-3} + \epsilon_t, \quad \epsilon_t \sim WN(0, \sigma^2),$$

(1) 写出 X_t 的谱密度 $f_X(\omega)$.

(2) 计算滤波后过程

$$Y_t = \frac{1}{3}(X_{t-1} + X_t + X_{t+1})$$

的谱密度 $f_Y(\omega)$, 并比较 $f_X(\omega)$ 和 $f_Y(\omega)$ 在频率 $\omega = 2\pi/3$ 的值。