

中国科学技术大学

2020—2021学年第二学期期末试卷

考试科目 时间序列分析 得分 _____

所在系 _____ 姓名 _____ 学号 _____

考试时间: 2021年7月4日8:30—10:30

一. (32分) 填空选择题(每题只有1空的每空3分, 有两空的每空2分, 答案请写在答题纸上):

1. 不考虑截距项和误差项方差的估计, 下面模型需要估计的参数最多的是_____.

- A. $ARIMA(1, 1, 1) \times (2, 0, 1)_{12}$ B. $ARMA(3, 3)$
C. $ARMA(1, 1) \times (1, 2)_4$ D. $ARIMA(2, 2, 3)$

2. 考虑AR(2)模型 $X_t = X_{t-1} - 0.25X_{t-2} + \varepsilon_t, \varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$, 则 X_t 的自相关函数 $\rho_1 =$ _____, $\rho_k =$ _____ ($k = 1, 2, \dots$).

3. 随机序列 X_t 满足 $X_t = 1 + 1.5 \sum_{j=-\infty}^{t-1} \varepsilon_j + \varepsilon_t, \varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$, 则 X_t 服从_____过程(hint: 用 $ARIMA(p, d, q)$ 表示).

4. 下列过程不是平稳的是_____.

- A. $(1 + 1.1L - 1.8L^2)Y_t = \varepsilon_t$ B. $(1 + 1.1L + 0.18L^2)Y_t = \varepsilon_t$
C. $Y_t = 0.8 - 0.99Y_{t-1} + \varepsilon_t$ D. $Y_t = 0.2Y_{t-1} + \varepsilon_t - 0.4\varepsilon_{t-1}$

5. AR(p)模型

$$X_t = a_0 + a_1X_{t-1} + \dots + a_pX_{t-p} + \varepsilon_t, \varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2), a_j = (1/3)^j, j = 1, \dots, p$$

的传递形式为 $X_t = \mu + \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k \varepsilon_{t-k}$, 则 $\sum_{k=0}^{\infty} \psi_k =$ _____.

6. 设 X_t 是随机游走序列, 即 $X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t, \varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$, 则该序列的自相关系数 $\rho(t, s) = Corr(X_t, X_s) =$ _____.

7. 对于可逆的MA(q)模型, 它的传递形式可写为

$$X_t = \sum_{k=0}^q b_k \varepsilon_{t-k}, \text{ 其中, } b_0 = 1, \varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2).$$

则基于 t 及之前对 X_{t+l} 预测均方误差为_____.

8. AR(2)模型的自相关系数 $\rho_1 = 0.6, \rho_2 = 0.5$, 则二阶偏自相关系数 $a_{22} =$ _____.

9. 对 T 个数据建立AR(2)模型如下 $Y_t = 140 + 0.5Y_{t-1} + 0.2Y_{t-2} + \varepsilon_t$, 已知 $Y_T = 139, Y_{T-1} = 134$, 一步预测值 $Y_T(1) =$ _____ 二步预测值 $Y_T(2) =$ _____.

10. 当且仅当 θ_2 满足_____时, MA(2)模型

$$X_t = \mu + \epsilon_t - \epsilon_{t-1} - \theta_2 \epsilon_{t-2}$$

可逆.

二. (20分) 考虑以ARMA(2,1)模型

$$(1 + 0.8L - 0.64L^2)X_t = (1 - 0.4L)\varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2),$$

- (1) 请问该模型是否是平稳过程? 若是, 请写出该模型的传递形式.
- (2) 已知 $X_t, X_{t-1}, \dots$, 求出 X_{t+l} 的最佳线性预测, 并求出最佳预测的95%的置信区间.
- (3) 写出该模型的谱密度函数.

三. (18分) 设 $\{X_t, t = \pm 1, \pm 2, \dots\}$ 是满足AR(2)模型

$$X_t = aX_{t-1} - \frac{a^2}{4}X_{t-2} + \epsilon_t, \quad |a| < 2, \quad \epsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$$

的序列. 求

- (1) 已知 $X_t, X_{t-1}, \dots$ 时, X_{t+l} 的最佳线性预测 $\hat{X}_t(l)$.
- (2) 试求1)中 $\hat{X}_t(l)$ 的均方误差 $E[e_t(l)^2]$, $l = 1, 2, \dots$.(用 $\{X_t, t = \pm 1, \pm 2, \dots\}$ 的自协方差函数表示.)
- (3) 试求极限 $\lim_{l \rightarrow \infty} E[e_t(l)^2]$.

四. (15分) 对于AR(1)模型 X_t

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \varepsilon_t, \quad |\phi_1| < 1,$$

Y_t 是平稳过程 X_t 经过一保时线性滤波器 H 得到的输出, 即

$$Y_t = \sum_{j=0}^{+\infty} h_j X_{t-j}, \quad \sum_{j=0}^{\infty} |h_j| < \infty.$$

- (1) 验证 Y_t 是一个平稳序列(L^2 意义下存在性和平稳性).
- (2) 求 Y_t 的谱密度.

五. (15分) 考虑平稳(因果)AR(p)模型

$$X_t = a_1 X_{t-1} + \dots + a_p X_{t-p} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2),$$

- (1) 写出 X_t 的谱密度 $f_X(\omega)$.
- (2) Y_t 为 X_t 的逆谱密度 $f_Y(\omega) = \frac{1}{4\pi^2 f_X(\omega)}$ 所对应的随机序列, 验证 Y_t 是MA(p)序列.
- (3) 求出 X_t 的逆相关函数(即 Y_t 的相关函数).