

26 时间序列分析 A final

1. (1) 在 GARCH(p, q) 模型 $\epsilon_t = \left(\alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i \epsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^2 \right)^{\frac{1}{2}} v_t$ 中, 写出 σ_t^2 的定义, 并说明 v_t, α_i, β_i 应满足的条件.

(2) 设 $\{\epsilon_t\}$ 为 GARCH(p, q) 过程, 且 $\mathbb{E}v_t^4 < \infty, \mathbb{E}\epsilon_t^4 < \infty$, 证明 $\{\epsilon_t^2\}$ 为 ARMA(p, q) 过程.

2. ARIMA($p, 1, q$) 过程是否平稳? 说明理由.

3. 设

$$X_t = 0.4X_{t-1} + \epsilon_t + 0.2\epsilon_{t-1}.$$

写出其 Wold 表示, 求 Wold 系数和新息序列, 并证明该过程为纯非决定性过程.

4. 已知 AR(2) 过程满足 $\rho_1 = 0.7, \rho_2 = 0.5$, 求 AR(2) 过程的具体形式.

5. 对于 AR(p) 模型

$$X_t = \sum_{i=1}^p a_i X_{t-i} + \epsilon_t$$

利用 $(X_1, \dots, X_n)$ 对 X_{n+k} ($n > p, k \geq 1$) 作最佳线性预测, 写出其表达式和推导过程.

6. 设 $\{\omega_t\}_{t \geq 1}$ 为 $WN(0, \sigma_\omega^2)$, $\phi \in (-1, 1)$. 过程 $\{X_t\}_{t \geq 0}$ 满足

$$X_t = \phi X_{t-1} + \omega_t, \quad t = 1, 2, \dots,$$

且 (1) - (4) 问中 $X_0 = \omega_0$. 求:

(1) 证明 $X_t = \sum_{j=0}^t \phi^j \omega_{t-j}$;

(2) 求 $\mathbb{E}(X_t)$;

(3) 求 $\text{Var}(X_t)$;

(4) 证明 $\text{Cov}(X_{t+h}, X_t) = \phi^h \text{Var}(X_t)$;

(5) X_0 取何值时, $\{X_t\}$ 为平稳过程? 说明理由.

7. 若 $\{X_t\}$ 为可逆 ARMA 过程, 设

$$Y_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \gamma_j X_{t-j}.$$

求 $\{Y_t\}$ 的谱密度并证明其为 ARMA 过程.

8. 设

$$X_t = \sum_{j=1}^p a_j X_{t-j} + \epsilon_t$$

为 $AR(p)$ 过程, 其中 $\{\epsilon_t\} \sim WN(0, \sigma^2)$, 记 $a_0 = -1$. 证明其逆自协方差函数满足

$$\gamma_k = \begin{cases} \sigma^2 \sum_{j=0}^{p-k} a_j a_{j+k}, & 0 \leq k \leq p, \\ 0, & k > p. \end{cases}$$

9. 若 $\{X_t\}$ 为 ARMA 过程, $\{Y_t\}$ 为与 $\{X_t\}$ 独立的白噪声, 证明 $\{X_t + Y_t\}$ 仍为 ARMA 过程.

10. 设 ARMA(1,1) 过程满足

$$X_t = aX_{t-1} + \varepsilon_t + b\varepsilon_{t-1}, \quad \{\varepsilon_t\} \sim WN(0, \sigma^2).$$

求其自协方差函数 γ_k .

11. 设 $\{X_t\}$ 为零均值平稳过程, 其谱密度函数为

$$f_X(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{2}{3} + \frac{5}{18 \cos \lambda - 30} \right), \quad \lambda \in [-\pi, \pi).$$

求 $\{X_t\}$ 的自协方差函数 $\gamma_X(k)$.

12. 设 $\{X_t\}$ 为零均值平稳过程, 且 $\rho_1 = 0.6$, $\rho_2 = 0.4$, $\rho_3 = 0.3$. 求其三阶偏自相关系数.