

中国科学技术大学

2020—2021学年第二学期期末考试B卷

考试科目 时间序列分析 得分

所在系 姓名 学号

一. (32分) 填空选择题(每空2分, 答案请写在答题纸上):

1. 为了判断一个平稳序列中是否含有信息, 是否可以继续分析, 需要对该序列进行_____检验, 该检验用到的统计量是_____分布. 原假设为_____.
2. 设ARMA(2, 1): $X_t - 0.1X_{t-1} + aX_{t-2} = \epsilon_t - 0.5\epsilon_{t-1}$, 当 a 满足_____条件时, 模型是平稳的.
3. 设 Y_t 是个白噪声序列, 模拟一条 $n = 400$ 的 Y_t 序列. 若我们进行研究其一阶协方差 γ_1 的估计 $\hat{\gamma}_1$, 则 $\hat{\gamma}_1$ 的95%的置信区间_____.
4. 考虑如下的平稳过程, $EA = EB = EAB = 0, EA^2 = EB^2 = \sigma^2$,

$$X_t = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t), \omega \in [0, \pi]$$

证明基于 X_1, X_2, X_3 作最佳线性预测 $E[X_4 | X_3, X_2, X_1] =$ _____.

5. 对平稳的AR(2)模型 $X_t = a_1X_{t-1} + a_2X_{t-2} + \epsilon_t$, 则偏相关系数 $\phi_{11} =$ _____, $\phi_{22} =$ _____, $\phi_{33} =$ _____.
6. 设 X_t 是随机游走序列, 即 $X_t = X_{t-1} + \epsilon_t, \epsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$. 则该序列的自相关系数 $\rho(t, s) = \text{Corr}(X_t, X_s) =$ _____.
7. 对于可逆的MA(q)模型, 它的传递形式可写为

$$X_t = \sum_{k=0}^q b_k \epsilon_{t-k}, \text{ 其中 } b_0 = 1, \epsilon_t \sim N(0, \sigma^2).$$

则基于 t 及之前对 X_{t+l} 预测均方误差为_____.

8. AR(2)模型的自相关系数 $\rho_1 = 0.6, \rho_2 = 0.5$, 则该模型系数 $a_1 =$ _____, $a_2 =$ _____.
9. 考虑如下的时间序列模型MA(2)

$$Y_t = 40 + \epsilon_t - 0.6\epsilon_{t-1} + 0.8\epsilon_{t-2}, \epsilon_t \sim N(0, 20),$$

$\epsilon_t = 2, \epsilon_{t-1} = -4, \epsilon_{t-2} = -6$. 则未来两期的值 $Y_{t+1} =$ _____, $Y_{t+2} =$ _____.

10. 当且仅当 θ_2 满足_____时, MA(2)模型

$$X_t = \mu + \epsilon_t - \epsilon_{t-1} - \theta_2 \epsilon_{t-2}$$

可逆.

二. (20分) 考虑以MA(2)模型

$$X_t = (1 - 0.8L + 0.64L^2)\epsilon_t, \quad \epsilon_t \sim N(0, \sigma^2),$$

- (1) 请问该模型是否是可逆过程? 若是, 请写出该模型的逆转形式.
- (2) 已知 $X_t, X_{t-1}, \dots$, 求出 X_{t+l} 的最佳线性预测, 并求出最佳预测的95%的置信区间.
- (3) 写出该模型的谱密度函数.

三. (18分) 从AR(2)模型 $X_t = 1.5X_{t-1} - 0.75X_{t-2} + \epsilon_t$, $\epsilon_t \sim N(0, 1)$ 模拟产生了 $n = 144$ 个数据, 从这组数据计算的 $\hat{\gamma}(0) = 8.434$, $\hat{\rho}(1) = 0.834$, $\hat{\rho}(2) = 0.476$, 求 a_1, a_2 及 σ^2 的估计以及 $\mathbf{a} = (a_1, a_2)^T$ 估计的协差阵的渐近估计.

四. (20分) 对ARMA(p, q)序列

$$X_t = a_1 X_{t-1} + \dots + a_p X_{t-p} + \epsilon_t + b_1 \epsilon_{t-1} + \dots + b_q \epsilon_{t-q}, \quad \epsilon_t \sim WN(0, \sigma^2),$$

- (1) 令 $m = \max\{p, q\}$

$$Y_t = \begin{cases} X_t/\sigma, & t = 1, \dots, m \\ (X_t - a_1 X_{t-1} - \dots - a_p X_{t-p})/\sigma, & t = m+1, \dots, \end{cases}$$

求解 $EY_t Y_s$.

- (2) 令 $\{\eta_t\}$ 是和 $\{\epsilon_t\}$ 独立的白噪声 $WN(0, \nu^2)$, 试问

$$Z_t = X_t + \eta_t$$

还是ARMA序列吗? 如果是, 阶数是多少?

五. (10分) 考虑平稳(因果)AR(p)模型

$$X_t = a_1 X_{t-1} + \dots + a_p X_{t-p} + \epsilon_t, \quad \epsilon_t \sim WN(0, \sigma^2),$$

- (1) 写出 X_t 的谱密度 $f_X(\omega)$.
- (2) Y_t 为 X_t 的逆谱密度 $f_Y(\omega) = \frac{1}{4\pi^2 f_X(\omega)}$ 所对应的随机序列, 验证 Y_t 是MA(p)序列.

中国科学技术大学

2020—2021学年第二学期期末试卷

考试科目 时间序列分析 得分

所在系 姓名 学号

考试时间: 2021年7月4日8:30—10:30

一. (32分) 填空选择题(每题只有1空的每空3分, 有两空的每空2分. 答案请写在答题纸上):

1. 不考虑截距项和误差项方差的估计, 下面模型需要估计的参数最多的是_____.

- A. $ARIMA(1, 1, 1) \times (2, 0, 1)_{12}$ B. $ARMA(3, 3)$
C. $ARMA(1, 1) \times (1, 2)_4$ D. $ARIMA(2, 2, 3)$

2. 考虑AR(2)模型 $X_t = X_{t-1} - 0.25X_{t-2} + \varepsilon_t$, $\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$, 则 X_t 的自相关函数 $\rho_1 =$ _____, $\rho_k =$ _____ ($k = 1, 2, \dots$).

3. 随机序列 X_t 满足 $X_t = 1 + 1.5 \sum_{j=-\infty}^{t-1} \varepsilon_j + \varepsilon_t$, $\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$, 则 X_t 服从_____过程(hint: 用 $ARIMA(p, d, q)$ 表示).

4. 下列过程不是平稳的是_____.

- A. $(1 + 1.1L - 1.8L^2)Y_t = \varepsilon_t$ B. $(1 + 1.1L + 0.18L^2)Y_t = \varepsilon_t$
C. $Y_t = 0.8 - 0.99Y_{t-1} + \varepsilon_t$ D. $Y_t = 0.2Y_{t-1} + \varepsilon_t - 0.4\varepsilon_{t-1}$

5. AR(p)模型

$$X_t = a_0 + a_1X_{t-1} + \dots + a_pX_{t-p} + \varepsilon_t, \varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2), a_j = (1/3)^j, j = 1, \dots, p$$

的传递形式为 $X_t = \mu + \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k \varepsilon_{t-k}$, 则 $\sum_{k=0}^{\infty} \psi_k =$ _____.

6. 设 X_t 是随机游走序列, 即 $X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t$, $\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$, 则该序列的白相关系数 $\rho(l, s) = Corr(X_t, X_s) =$ _____.

7. 对于可逆的MA(q)模型, 它的传递形式可写为

$$X_t = \sum_{k=0}^q b_k \varepsilon_{t-k}, \text{ 其中 } b_0 = 1, \varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2).$$

则基于 t 及之前对 X_{t+l} 预测均方误差为_____.

8. AR(2)模型的自相关系数 $\rho_1 = 0.6$, $\rho_2 = 0.5$, 则二阶偏自相关系数 $a_{22} =$ _____.

9. 对 T 个数据建立AR(2)模型如下 $Y_t = 140 + 0.5Y_{t-1} + 0.2Y_{t-2} + \varepsilon_t$, 已知 $Y_T = 139$, $Y_{T-1} = 134$, 一步预测值 $Y_T(1) =$ _____ 二步预测值 $Y_T(2) =$ _____.

10. 当且仅当 θ_2 满足_____时, MA(2)模型

$$X_t = \mu + c_t - c_{t-1} - \theta_2 c_{t-2}$$

可逆.

二. (20分) 考虑以ARMA(2, 1)模型

$$(1 - 0.8L + 0.64L^2)X_t = (1 - 0.4L)\varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2),$$

- (1) 请问该模型是否是平稳过程? 若是, 请写出该模型的传递形式.
- (2) 已知 $X_t, X_{t-1}, \dots$, 求出 X_{t+l} 的最佳线性预测, 并求出最佳预测的95%的置信区间.
- (3) 写出该模型的谱密度函数.

三. (18分) 设 $\{X_t, t = \pm 1, \pm 2, \dots\}$ 是满足AR(2)模型

$$X_t = aX_{t-1} - \frac{a^2}{4}X_{t-2} + \varepsilon_t, \quad |a| < 2, \quad \varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$$

的序列. 求

- (1) 已知 $X_t, X_{t-1}, \dots$ 时, X_{t+l} 的最佳线性预测 $\hat{X}_t(l)$.
- (2) 试求1)中 $\hat{X}_t(l)$ 的均方误差 $E[e_t(l)^2]$, $l = 1, 2, \dots$ (用 $\{X_t, t = \pm 1, \pm 2, \dots\}$ 的自协方差函数表示.)
- (3) 试求极限 $\lim_{l \rightarrow \infty} E[e_t(l)^2]$.

四. (15分) 对于AR(1)模型 X_t

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \varepsilon_t, \quad |\phi_1| < 1,$$

Y_t 是平稳过程 X_t 经过一保时线性滤波器 H 得到的输出, 即

$$Y_t = \sum_{j=0}^{+\infty} h_j X_{t-j}, \quad \sum_{j=0}^{\infty} |h_j| < \infty.$$

- (1) 验证 Y_t 是一个平稳序列(L^2 意义下存在性和平稳性).
- (2) 求 Y_t 的谱密度.

五. (15分) 考虑平稳(因果)AR(p)模型

$$X_t = a_1 X_{t-1} + \dots + a_p X_{t-p} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2),$$

- (1) 写出 X_t 的谱密度 $f_X(\omega)$.
- (2) Y_t 为 X_t 的逆谱密度 $f_Y(\omega) = \frac{1}{4\pi^2 f_X(\omega)}$ 所对应的随机序列, 验证 Y_t 是MA(p)序列.
- (3) 求出 X_t 的逆相关函数(即 Y_t 的相关函数).