

26 多元统计分析 A 期末回忆版

NUUUS

一、对于五个变量的相关系数矩阵 R ，做单因子模型因子分析得到 $L \in \mathbb{R}^{5 \times 1}$ ，即

$$X = Lg + \varepsilon, \quad \text{Var}(g) = 1, \quad \text{Cov}(g, \varepsilon) = 0, \quad \text{Var}(\varepsilon) = \Psi \text{ 为对角阵.}$$

且 R 、 L 给出了具体数值

(1) 对于得到的单因子 g ，解释其意义；因子 g 与哪个变量的相关系数最大？

(2) 求特殊方差。

(3) 求变量 i 分别与变量 j 和 k 的相关系数的拟合值，并比较哪个误差更小。

二、给出距离矩阵 D

(1) D 是欧氏距离矩阵吗？

(2) 用完全连接法进行层次聚类，画出树状图。

三、设 $X = (X_1, \dots, X_3)^\top$ ，且 $\Sigma = \text{Var}(X)$ 为

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 + \sigma^2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 + \sigma^2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 + \sigma^2 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 > 0.$$

求第一主成分及其解释的方差比例。

四、设 A 有 SVD 为 $A = U\Sigma V^\top$ ，其中 u_1 为 U 的第一列， v_1 为 V 的第一列， σ_1 为 A 的最大奇异值。

(1) 证明

$$\max_{\|u\|=\|v\|=1} u^\top A v = \sigma_1,$$

且当 $u = u_1$ 、 $v = v_1$ 时取到最大值。

(2) 若 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ ， $a_{ij} > 0$ ，求证： $a_{ij} \leq \sigma_1$ ，且 u_1 与 v_1 的非零分量同号。

(3) 求证

$$\left| \sum_{i,j} a_{ij} (u_i - v_j)^2 \right| \leq 2\sigma_1, \quad \text{其中 } \|u\| = \|v\| = 1.$$

五、(1) 对 $W \sim W_p(m, I_p)$ ，求证

$$\frac{\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p W_{ij}}{p} \sim \chi_m^2.$$

(2) 设 $z \sim N_p(0, I_p)$, $W \sim W_p(m, I_p)$, 且 $W \perp z$, 求证

$$z^\top z + \frac{z^\top W z}{z^\top z} \sim \chi_{m+p}^2.$$

六、已知: 若 $X \sim \chi_\alpha^2$, $Y \sim \chi_\beta^2$, 且 $X \perp Y$, 则

$$\frac{X}{X+Y} \sim \text{Beta}\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}\right).$$

(1) 设 $X = (X_1, \dots, X_n)^\top$ 服从球对称分布。求证

$$Y_k = \frac{X_1^2 + \dots + X_k^2}{X_1^2 + \dots + X_n^2} \sim \text{Beta}\left(\frac{k}{2}, \frac{n-k}{2}\right),$$

且 $Y_k \perp X_1^2 + \dots + X_n^2$ 。

(2) 设 A 为对称幂等矩阵, $r(A) = n-1$ 。 $Z_1, \dots, Z_n \stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim} N_p(0, I_p)$, 并令

$$Z = (Z_1, \dots, Z_n)^\top.$$

求证

$$\frac{\det(Z^\top A Z)}{\det(Z^\top Z)} \sim \text{Beta}\left(\frac{n-p}{2}, \frac{p}{2}\right).$$