

## 《数学分析 (B1)》2023 年吴健老师班第一次单元测试

一、(20 分) 数列  $\{x_n\}$  满足  $x_1 = 1$ ,  $x_{n+1} = \sqrt{2x_n}$ , 求证:  $\{x_n\}$  收敛, 并计算  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 。

二、(20 分) 计算极限:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin^3 x} \left( \left( \frac{2 + \cos x}{3} \right)^x - 1 \right)$ 。

三、(20 分) 设  $f(x) = \frac{1 + \tan x}{\sin x} - \frac{1}{\tan x}$ , 计算  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 。

四、(20 分) 设  $f(x)$  在为一个  $[a, b]$  ( $a > 0$ ) 上单调递增且恒取正值的连续函数, 证明:  $\exists \xi \in (a, b) : a^2 f(b) + b^2 f(a) = 2\xi^2 f(\xi)$ 。

五、(20 分) 设  $f(x)$  在  $x = 1$  处可导, 且  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(e^{x^2}) - 3f(1 + \sin^2 x)}{x^2} = 2$ 。求  $f'(1)$ 。

六、(20 分) 设  $a, b$  满足  $e < a < b < e^2$ 。求证:  $\ln^2 b - \ln^2 a > \frac{4}{e^2}(b - a)$ 。