中 国 科 学 技 术 大 学
2021 - 2022学年第二学期期中考试试卷

得分：______________

考试科目：　线性代数（B1）

姓名：__________　学号：____________

所在院、系：______________

题号	一	二	三	四	五	六	总分
得分							
复查							

装订线　答题时不要超过此线

注：题目中的 $\mathbb{F}$ 表示任意数域, $\mathbb{R}$ 表示实数域, V 表示 $\mathbb{F}$ 上的有限维线性空间.

一、【每小题5分, 共30分】填空题:

1. 若线性方程组 $\begin{cases} 2x_1+3x_2-5x_3 &= 7 \\ 4x_1+2x_2-4x_3 &= 8 \\ 2x_1+5x_2-8x_3 &= a \end{cases}$ 有解, 则 $a =$ ______________.

2. 若矩阵 A, B 皆为可逆矩阵, 则 $D = \begin{pmatrix} O & A \\ B & C \end{pmatrix}$ 也可逆, 且 $D^{-1} =$ ____________.

3. 已知 V 是 $\mathbb{F}$ 上任一线性空间, $\lambda \in \mathbb{F}$. 若向量组 $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$ 与 $\{\alpha_1+\alpha_2, \alpha_2+\alpha_3, \alpha_3+\alpha_4, \alpha_4+\lambda\alpha_1\}$ 都是 V 的基, 则 λ 满足条件______________.

4. 已知方阵 A 的逆矩阵 $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, 则伴随矩阵 $A^* =$ ______________.

5. 矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ 构成线性空间 $\mathbb{F}^{2\times 2}$ 的一组基.

这组基到 $\mathbb{F}^{2\times 2}$ 的自然基 $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$ 的过渡矩阵为____________________.

6. 记 $W = \{f(x) \in \mathbb{F}[x] \mid \deg f(x) \leqslant n, f(2) = 0\}$, 是 $\mathbb{F}[x]$ 的子空间. 则 W 有一组基________________________.

二、【每小题5分（判断正误2分，理由3分），共20分】

判断题：判断下列命题是否正确，并简要说明理由或举出反例.

1. 域 $\mathbb{F}$ 上所有行列式为 0 的 n 阶方阵构成 $\mathbb{F}^{n\times n}$ 的子空间.

2. 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 与 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$ 等价，则 $s = t$.

3. 设 A 为 n 阶方阵，且 A 与任意 n 阶可逆矩阵相乘可交换. 则 A 必为数量矩阵.

4. 设 A, B, C 为 n 阶实方阵. 若 $A^{\mathrm{T}}AB = A^{\mathrm{T}}AC$，则 $AB = AC$.

三、【4+6+6=16分】

已知方阵$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 & 3 \\ 4 & 6 & 3 & 5 \\ 4 & 14 & 1 & 7 \\ 2 & -3 & 3 & a \end{pmatrix}$, 方程组 $A\mathbf{x} = 0$ 的解空间 V_A 是 2 维的.

(1) 求 a.

(2) 求 $A\mathbf{x} = 0$ 的一个基础解系.

(2) 求 $A\mathbf{x} = \beta$ 的通解, 其中 $\beta = (0\ 3\ -3\ 6)^{\mathrm{T}}$.

四、【8+8=16分】已知两个 n 阶方阵

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 5 & 3 & & & \\ 2 & 5 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 5 & 3 \\ & & & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

(1)计算矩阵 $A^{-1}B$.

(2)计算行列式 $\det(B)$.

五、【6+4=10分】

求向量组 $\alpha_1 = (1,\ -1,\ 2,\ 4)$, $\alpha_2 = (0,\ 3,\ 1,\ 2)$, $\alpha_3 = (2,\ -11,\ 1,\ 2)$, $\alpha_4 = (2,\ 1,\ 5,\ 10)$ 的一个极大线性无关组, 并将它扩充为 $\mathbb{R}^4$ 的一组基.

六、【4+4=8分】设 A 为 $\mathbb{F}$ 上的秩为 $n-1$ 的 n 阶方阵.

(1) 证明 A 的伴随矩阵 A^* 的秩为1.

(2) 证明存在 $k \in \mathbb{F}$, 使得 $(A^*)^2 = kA^*$.

中 国 科 学 技 术 大 学

2021 – 2022 学年第二学期期末考试试卷

课程名称 线性代数(B1) 课程编号 MATH1009

考试时间 2022年07月03日 考试形式 闭卷

学院 ________ 姓名 ________ 学号 ________

题号	一	二	三	四	五	六	总分
得分							
复评人							

答题时不要超过此线

注意事项：

1. 答题前，考生务必将所在院系、姓名、学号等填写清楚。
2. 请考生在答卷纸左侧留出装订区域。

得分	评卷人

一、【本题30分，每空5分】填空.

1. 已知向量 α 在 $\mathbb{R}^3$ 的自然基下的坐标为 $(1,2,3)$, 则 α 在 $\mathbb{R}^3$ 的基 $\alpha_1=(1,0,0)$, $\alpha_2=(1,1,0)$, $\alpha_3=(1,1,2)$ 下的坐标为________.

2. 若 3 阶方阵 A 的特征值分别是 $1,2,3$, 则 $\det(I+A)=$________.

3. 平面$\mathbb{R}^2$上的线性变换$\mathcal{A}$: $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$将单位圆$C$变为椭圆$E$. 则椭圆$E$的长、短半轴的长度分别是________.

4. 已知线性变换$\mathcal{A}$在某组基下的矩阵为$\begin{pmatrix}-2&0&0\\2&x&2\\3&1&1\end{pmatrix}$, 在另一组基下的矩阵为$\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&2&0\\0&0&y\end{pmatrix}$. 则$x$与$y$分别为________.

5. 二次型 $Q(x_1,x_2,x_3)=(x_1-x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_3-x_1)^2$ 的规范形为________.

6. 若实二次型$Q(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_2^2+6x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+4tx_2x_3$ 正定, 则参数 t 满足________.

得分	评卷人

二、【每小题5分,共20分】判断下面的说法是否正确，并给出理由(判断正确得2分,给出正确理由得3分).

1. 设A与B都是阶n方阵且A可逆，则AB与BA相似.

2. 欧氏空间的度量矩阵相合于单位阵.

3. 欧氏空间中线性变换的不同特征值对应的特征向量一定相互正交.

4. 正交方阵都实相似于对角阵.

得分	评卷人

三、【14分】给定$\mathbb{R}^3$上实二次型$Q(x)=x_1^2+2x_2^2+3x_3^2-4x_1x_2-4x_2x_3$.

1. 利用正交变换将该二次型化为标准形, 并写出相应的正交变换(12分);
2. 判断方程$Q(x)=1$在三维直角坐标系中所表示曲面的类型(2分).

得分	评卷人

四【14分】在数域$\mathbb{R}$上次数不超过3的多项式全体构成的线性空间$\mathbb{R}_3[x]$上定义内积$(f,g):=\int_{-1}^{1}\frac{f(x)g(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

$\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

1. 把向量组$1,x,x^2$按顺序做Schmidt正交化得到单位正交向量组(9分).
2. 令$W=\langle 1,x,x^2\rangle$. 求多项式$p(x)\in W$使得$|x^3-p(x)|$达到最小(5分).

得分	评卷人

五、【14分】给定矩阵$A=\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

1. 证明: $\mathbb{R}^3$上的线性变换$\mathcal{A}$: $\mathbf{x} \to A\mathbf{x}$为正交变换(2分);

2. 证明：$\mathcal{A}$是绕过原点的某条直线l 的旋转变换(5分);

3. 求旋转轴l的方向及旋转角度θ(7分).

答题时不要超过此线

得分	评卷人

【8分】设A，B是n阶复方阵且$A^2 = A$, $B^2 = B$.

1 证明：A可以相似对角化(4分);

2 证明：若$AB = BA$,则存在可逆阵P使得$P^{-1}AP$与$P^{-1}BP$同时为对角阵(4分).

LA22 秋 mid

1 填空

(1)写出向量组$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -9 \\ 3 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \alpha_5 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$的一个极大线性无关组:______________

(2) 行列式 $\begin{vmatrix} -3 & x & 7 & x \\ 1 & x & 5 & -1 \\ 4 & 3 & -x & 1 \\ 2x & -1 & 1 & x \end{vmatrix}$ 的完全展开式中，x^4 项的系数为：______________

(3) 已知 $A^* = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$,则$A =$______________

(4) 设 B, C, D 均为 n 阶方阵，且 B, C 可逆，则 $M = \begin{pmatrix} O & B \\ C & D \end{pmatrix}$ 也可逆，且 $M^{-1} =$ ______________

(5) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ 则集合 $V = \{B \in R^{4\times 4} | AB = O\}$ 是 $R^{4\times 4}$ 的子空间，子空间的维数 $dimV =$ ______________

(6) 将 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 4 & 8 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ 分解成矩阵乘积 $A = LU$, 其中 L 为下三角方阵, U 为上三角方阵,且主对角线上的元素为 1 或 0, 则 L=______________ , U=______________

2 判断题 (正确的简单说明理由，错误的举出反例)

1. 设 $\boldsymbol{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3}$ 是 $\boldsymbol{Ax=0}$ 的一个基础解系, 则 $\boldsymbol{\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3}$,$\boldsymbol{\alpha_1+\alpha_2+5\alpha_3}$, $\boldsymbol{4\alpha_1+\alpha_2-2\alpha_3}$ 也是该方程组的基础解系。

2. 设 A,B 都是 n 阶方阵, 则 $\begin{vmatrix} A & B \\ & \\ B & A \end{vmatrix} = |A+B||A-B|$

3. 设 A,B$\in \mathbb{R}^{n\times n}$, 若线性方程组 Ax=0 与 Bx=0 同解, 则 A 与 B 的列向量组等价。

4. 设 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, 满足 $AA^T = A^2$, 则 A 为对称矩阵

3

考虑线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 1 \\ \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 16x_4 = a \end{cases}$$

(1) 根据 a 的取值，讨论方程组解的情况。

(2) 有解时，求出方程组的通解。

4

计算 n 阶行列式 $\begin{vmatrix} x_1 - a_1 & x_2 & x_3 & ... & x_n \\ x_1 & x_2 - a_2 & x_3 & ... & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & ... & x_n - a_n \end{vmatrix}$, 其中 $a_1 a_2 ... a_n \neq 0$

5

考虑 $\mathbb{R}^{2\times 2}$ 中的两组基

$$\Gamma_1 : \mathrm{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathrm{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathrm{A}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \mathrm{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\Gamma_2 : \mathrm{B}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \mathrm{B}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \mathrm{B}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathrm{B}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(1) 求Γ_1 到Γ_2 的过渡矩阵。

(2) 已知 $\boldsymbol{C} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ 在 Γ_2 下的坐标是 $(1,1,1,1)^T$, 求 $\boldsymbol{C}$ 在 Γ_1 下的坐标

(3) 求所有的$D \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, 使得 D 在$\Gamma_1$ 和Γ_2 下的坐标相同。

6

已知 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, m \le n, rank(A) = r$

(1) 证明: 存在$B \in \mathbb{R}^{m\times n}$,满足$AB = O, BA = O, rank(B) = m - r.$

(2)设 $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.求一个满足 (1) 中条件的 B。

LA22 秋 final

一、[30 分] 填空题

(1) 若 $\text{rank}(\boldsymbol{a_1},\ \boldsymbol{a_2},\ \boldsymbol{a_3},\ \boldsymbol{a_4}) = 4, \text{rank}(\boldsymbol{a_1},\ \boldsymbol{a_2},\ \boldsymbol{a_3},\ \boldsymbol{a_5}) = 3$, 则 $\text{rank}= (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a_4} + \boldsymbol{a_5}) =$ ____________

(2) 若 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ 为 4 阶正交阵，且 $a_{11} = -1$, 则线性方程组 $\boldsymbol{AX} = (1, 0, 0, 0)^T$ 的解为 ____________

(3) 设若 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & a & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$ 相似，则 $a =$ ____________

(4) 若 $\boldsymbol{a_1} = (1, 2, 0)^T, \boldsymbol{a}_2 = (1, 0, 1)^T$ 是可逆方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 2 的特征向量，且 $\boldsymbol{b} = (-1, 2, -2)^T$, 则 $\boldsymbol{A^{-1}b} =$ ____________

(5) 设 $\mathbb{R}_2[x]$ 中某个内积在基 $\boldsymbol{a_1} = x, \boldsymbol{a_2} = -1, \boldsymbol{a}_3 = x^2$ 下的度量矩阵为 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. 则该内积在另外一组基 $\boldsymbol{b_1} = x - 1, \boldsymbol{b}_2 = x + 1, \boldsymbol{b}_3 = x^2 - 2x - 1$ 下的度量矩阵为 ____________

(6) 实二次型 $\boldsymbol{Q}(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_2^2 + 2x_3^2 - 4x_1x_2 - 2x_1x_3$ 的正惯性指数为 ____________

二、[20 分] 判断下面的说法是否正确，并简要说明理由或者举出反例

(1) 若 $\boldsymbol{A}$ 为 $m \times n$ 实矩阵，则对任意 m 维非零实列向量 $\boldsymbol{b}$, 线性方程组 $\boldsymbol{A^T AX} = \boldsymbol{A^T b}$ 一定有解。

(2) 存在正交矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$. 满足 $\boldsymbol{A}^2 - \boldsymbol{B}^2 = \boldsymbol{AB}$

(3) 若 $\boldsymbol{A}$ 为实方阵, 且 $\boldsymbol{det(A)} < 0$, 则 A 必有特征值为负实数

(4) 若 $\boldsymbol{A}$ 为实方阵, 则 $\boldsymbol{det(I + A^T A)} > 0$.

三、[12 分] 考虑线性空间 $\boldsymbol{V} = \mathbb{R}^{2\times 2}$, 即由 2 阶实方阵构成的实线性空间。对于 $\boldsymbol{V}$ 中任意两个矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$. 定义

$$(A, B) = \operatorname{tr}(\boldsymbol{A}^T \boldsymbol{B})$$

(1) 证明：如上定义的法则给出了 $\boldsymbol{V}$ 的一个内积。(6 分)

(2) 通过 Schmidt 正交化方法将 $\boldsymbol{V}$ 的向量组 $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ 改造为相对于 (1) 中所定义内积的标准正交向量组 $\boldsymbol{C_1, C_2}$(6 分)

四 [14 分] 设 $\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} .\boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的一组基，$\mathscr{A}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的一个线性变换，且

$$\mathscr{A}(\boldsymbol{a}_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} .\mathscr{A}(\boldsymbol{a}_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathscr{A}(\boldsymbol{a}_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(1) 求出线性变换 $\mathscr{A}$ 的全部特征值和对应的特征子空间。(7 分)

(2) 求 $\mathscr{A}$ 在基 $b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} .b_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 下的矩阵。(7 分)

五、[14 分]

设实二次型 $\boldsymbol{Q}(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 + 5x_2^2 + \mathrm{t}x_3^2 - 2x_1x_2 + 6x_1x_3 - 6x_2x_3$ 的秩为 2.

(1) 求参数 t 的值。(3 分)

(2) 利用正交替换化该二次型为标准形，并给出具体的正交替换。(9 分)

(3) 判断方程 $\boldsymbol{Q}(x_1, x_2, x_3) = 1$ 代表的二次曲面的类型。(2 分))

线性代数期中考试卷子

2023 年 5 月 21 日

中国科学技术大学数学科学学院

2022 ~ 2023 学年第 2 学期期中考试试卷

■ A 卷　　□ B 卷

课程名称 线性代数 (B1)　　课程编号 MATH1009

考试时间 2023 年 5 月 20 日　　考试形式 闭卷

姓 名 ________ 学 号 ________ 学 院 ________

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分
得分								

线　订　装

一、【30 分】填空题.

(1) 排列 $(3,6,5,4,1,2)$ 的逆序数是 ________.

(2) 齐次方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_1 - x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases}$ 的解空间的维数是 ________.

(3) 方程 $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ 的解 $\boldsymbol{X} =$ ________.

(4) 设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, 而 $\boldsymbol{A}^*$ 是它的伴随矩阵, 那么 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}) =$ ________, $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}^*) =$ ________.

(5) 如果 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_2 \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_3 \end{pmatrix}$, 其中 $\boldsymbol{A}_1$ 与 $\boldsymbol{A}_3$ 都是可逆矩阵, 那么 $\boldsymbol{A}^{-1} =$ ________.

(6) 矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ -2 & 3 & -11 & 5 \\ 4 & -5 & 17 & 3 \end{pmatrix}$ 的相抵标准形是 ________.

2023/05/20 18:49

二、【20 分】判断下面的说法是否正确, 并简要说明理由或者举出反例.

(1) 在 $\mathbb{R}^3$ 中, 任何 4 个向量都线性相关.

(2) 如果向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_s$ $(s \geq 2)$ 线性相关, 那么其中的每个向量都可以由其余的向量线性表示.

(3) 设 $\boldsymbol{A}$ 是一个秩为 4 的矩阵, 那么一定存在秩为 2 的矩阵 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 使得 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}$.

(4) 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为二阶方阵, 且 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{B} - \boldsymbol{I}$, 那么 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$.

2023/05/20 18:49

三、【12 分】当 a 为何值时，如下的线性方程组有解？当有解时，求出它的所有解.

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -1 \\ -x_1 + 11x_2 - x_3 = 3 \\ 3x_1 - 5x_2 + 7x_3 = a. \end{cases}$$

线

订

四、【8 分】计算 4 阶行列式 $\begin{vmatrix} a_1 - b & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_1 & a_2 - b & a_3 & a_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 - b & a_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 - b \end{vmatrix}$.

装

五、【10 分】设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & a+1 & a+2 \\ a+2 & a & a+1 \\ a+1 & a+2 & a \end{pmatrix}$ 为 3 阶方阵, 其中 $a \neq -1$. 求 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

六、【12 分】设 $n \geq 2$ 为正整数, 而 $a_1, \ldots, a_n$ 为复数域 $\mathbb{C}$ 内的 n 个互异的数. 用 V 表示次数小于 n 的全体复系数多项式构成的 $\mathbb{C}$ 上的线性空间. 对于 $j = 1, \ldots, n$, 令 $f_j(x) = (x - a_1)\cdots(x - a_{j-1})(x - a_{j+1})\cdots(x - a_n)$.

(1) 证明: $f_1, \ldots, f_n$ 构成 V 的一组基.

(2) 对于 $j = 1, \ldots, n$, 设 $a_j = \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi j/n} = \cos(2\pi j/n) + \mathrm{i}\sin(2\pi j/n)$, 即 $a_1, \ldots, a_n$ 为全体 n 次单位根. 求从基 $1, x, \ldots, x^{n-1}$ 到 $f_1, \ldots, f_n$ 的过渡矩阵.

(3) 在 (2) 的条件下, 求多项式 $1 + x + \cdots + x^{n-1}$ 在 $f_1, \ldots, f_n$ 下的坐标.

线

订

装

七、【8 分】

(1) 若 $\boldsymbol{C} \in F^{m\times n}$ 是一个行满秩的矩阵. 证明一定存在矩阵 $\boldsymbol{D} \in F^{n\times m}$ 使得 $\boldsymbol{CD} = \boldsymbol{I}_m$ 为单位阵.

(2) 若 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{AB}) = \operatorname{rank}(\boldsymbol{A})$, 证明存在 $\boldsymbol{X}$ 使得 $\boldsymbol{ABX} = \boldsymbol{A}$. (提示: 利用 $\boldsymbol{A}$ 的相抵标准形)

2023/05/20 18:49

中国科学技术大学

2022–2023 学年第 2 学期期末考试试卷（A）

课程名称：线性代数（B1）　　课程编号：MATH1009

考试时间：2023 年 7 月 13 号　　考试形式：闭卷

姓名：________　　学号：________　　学院：________

题号	一	二	三	四	五	六	总分
得分							

一、填空题：本题共 6 小题，每题 5 分，共 30 分。

1. 求 $\begin{pmatrix} 30 & 20 \\ 11 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ 在基 $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 下的坐标 ________.

2. 若方阵 A 的特征多项式为 $(\lambda-1)(\lambda+2)^2$. 则 A^2+A+I 的行列式为 ________.

3. $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{2023} =$ ________.

4. 二次型 $Q(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+3x_3^2-4x_1x_2-4x_2x_3$ 的规范形为 ________.

5. 平面 $\mathbb{R}^2$ 上的线性变换 $\mathcal{A}$: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ 将单位圆 C 变成椭圆 E, 则椭圆的面积为 ________.

6. 若线性变换在某组基下的矩阵为 $\begin{pmatrix} -1 & -1 & x \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, 在另一组基下矩阵为 $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & y \end{pmatrix}$, 则 x 与 y 分别为 ________.

二、判断题：本题共 4 小题，每题 5 分，共 20 分。判断下面的说法是否正确，并简要说明理由或者举出反例。

1、欧氏空间上的正交变换在任一组基下的矩阵为正交矩阵.

2. 实数域上的 n 阶对称矩阵一定有 n 个线性无关的特征向量.

3. 设 $\mathcal{A}$ 为 $\mathbb{R}^2$ 上正交变换. 若 $\mathcal{A}$ 为第二类正交变换则它的迹为零.

4. 若 A, B 是 n 阶实对称正定矩阵, 则 $A+B$ 也是正定矩阵.

三、(10 分) 设 α_1，α_2，α_3 为线性无关的 3 维列向量，$\mathcal{A}$ 为 $\mathbb{R}^3$ 上线性变换，满足

$$\mathcal{A}(\alpha_1) = 5\alpha_1 - 2\alpha_2 + 2\alpha_3,$$

$$\mathcal{A}(\alpha_2) = \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3,$$

$$\mathcal{A}(\alpha_3) = -2\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3.$$

求 $\mathcal{A}$ 的特征值和特征向量。

四. (16 分) 设二次型

$$Q(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 + tx_2x_3 + tx_1x_3.$$

(1) 求参数 t 满足什么条件时，该二次型正定？

(2) 当 $t = 2$ 时，请用正交变换将二次曲面 $Q(x_1, x_2, x_3) = 1$ 化为标准方程，并判断二次曲面类型.

五. (14 分) 考虑实线性空间 $V=\mathbb{R}^3$，对于任意的 $x,y\in V$，定义

$$(x,y)=x^T\begin{pmatrix}3&1&1\\1&3&1\\1&1&3\end{pmatrix}y$$

(1) 证明上述定义给出了 V 上的一个内积.

(2) 利用 Schmidt 正交化从基向量组 $(1,0,0)^T,(1,0,1)^T,(0,1,1)^T$ 构造一组标准正交基.

六. (10 分) 设 $L = nI_n - J_n$, 这里 I_n 表示 n 阶单位阵，J_n 表示所有元素全为 1 的 n 阶方阵.

(1) 证明：0 是 L 的一个特征值，并求其对应的特征向量.

(2) 证明：L 是半正定矩阵.

LA23 秋 mid

一、填空

1. $(1,1,1),(1,2,3),(2,4,a)$ 线性相关，则 $a=$ ________

2. $\begin{pmatrix}2 & 3\\4 & 5\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix}$ 解为 ________

3. $a_1=(1,3,5),a_2=(2,4,6),a_3=(3,2,0)$ 则 $(13,32,52)=$ ___a_1+ ___a_2+ ___a_3

4. $\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & -4\\-1 & -3 & -4 & -2\\2 & -1 & 4 & 4\end{pmatrix}$ 相抵标准型为 ________

5. $\{(1-x)^2,2x(1-x),x^2\}$ 到标准基 $\{1,x,x^2\}$ 的矩阵为 ________

6. $A=\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\1 & 0 & 0\\0 & 0 & -1\end{pmatrix},P=\begin{pmatrix}2 & 0 & 2\\3 & 1 & 1\\2 & 5 & 7\end{pmatrix},B=P^{-1}AP$ 则 $PB^{2023}P^{-1}-A^2=$ ______

二、判断

1. $n\geq 2,a_1-a_2,a_2-a_3,...,a_{n-1}-a_n,2(a_n-a_1)$ 总是相关

2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 5 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ 不相抵

3. 3 阶非零方阵 A, $A^* = -A^T$, 则 $\det A < 0$

4. 6x4 矩阵 $A = (a_1, a_2, a_3, a_4), Ax = 0$ 的基础解系为 (6,5,8,3)(2,0,2,3) 则 a_4 不能被 a_2, a_3 线性表示

三. 方程组 $\begin{cases} x_1+3x_2-x_3=1 \\ 2x_1+2\lambda x_2-10x_3=0 \\ 3x_1+8x_2+(\lambda-3)=4 \end{cases}$.

(1)λ 是多少时无解?

(2)λ 是多少时，有无穷组解？并写出通解

(3)λ 是多少时有唯一解?

四.

$$A=\begin{pmatrix} 4+x & 4 & 4 & 4 \\ 3 & 3+x & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2+x & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1+x \end{pmatrix}.x>0.\text{求}\det A\text{和}A^{-1}$$

五、给定 n 个不同的实数 x_{i}，已知存在不超过 $2n-1$ 次的多项式 $f_1,...,f_n,g_1,...,g_n$，

$$f_k(x_i)=g_k'(x_i)=\begin{cases}1,k=i\\0,k\neq i\end{cases},f_k'(x_i)=g_k(x_i)=0$$

(1) 证明 $S=\{f_1,...,f_n,g_1,...,g_n\}$ 是一组解

(2) 求 $q(x)=x^n+23$ 在 S 的坐标

(3)n=2. 求 S

六、A,B,C 为 n 阶方阵，证明

$$\exists X,Y,XA-3BY=C\Leftrightarrow\begin{pmatrix}A&0\\C&B\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}A&0\\0&B\end{pmatrix}$$

LA23 秋 final

一、填空题

(1)$1+x+x^2+x^3$ 在 $\{1,(x-1),(x-1)^2,(x-1)^3\}$ 下的坐标为：________

(2)A 的特征多项式 $(\lambda-2)(\lambda^2+9)$ 则 $\det(I-A)$ 的值是 ________

(3) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}^{2024} =$ ________

(4) 二次型 $x_1^2+2x_2^2+2x_3^2-tx_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$ 正定，t 的取值范围为 ________

(5)$V \to V$ 的线性变换在一组基 $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$ 下矩阵为 $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$，则在 $\{\alpha_2,\alpha_3,\alpha_1\}$ 下矩阵为 ________

(6)$(x,y) \to (x+y,y)$ 把单位圆变成椭圆，椭圆的长半轴是 ________

二、判断题

1.A 是 n 阶上三角正交方阵，则 A 是对角阵。

2.A 是满足 $AA^T=0$ 的复矩阵则 $A=0$.

3.A 正定，B 对称，则存在正实数 c 使得 $cA+B$ 正定。

4. 线性空间的子空间 X,Y 满足 $X\cup Y$ 是子空间, 则 $X\subset Y$ 或 $Y\subset X$

三、二次型 $Q(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-2x_2^2-2x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3+ax_2x_3$ 经过变换 $X=PY$ 可以变为 $by_1^2+2y_2^2-7y_3^2$.

(1)a 和 b 分别是多少

(2) 求出正交矩阵 P

(3)$Q=1$ 是什么类型的曲面?

四、对多项式 f,g 定义 $(f,g)=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}f(x)g(x)dx$

(1) 证明这是一个内积。

(2) 把一组基 $\{1,x,x^2,x^3\}$ 正交化为标准正交基

(3)$h(x)=1+x^3,W$ 为 $\{x,x^2\}$ 张成的子空间，求一个 $k\in W$ 使得 $|h-k|$ 最小

五、记 $M=\begin{pmatrix}7&1\\2&7\end{pmatrix}$, 二阶方阵的线性变换 $\mathfrak{U}(X)=MX-XM$.

(1) 求 $\mathfrak{U}$ 在基 $\{E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}\}$ 下的矩阵，其中 E_{ij} 是 i 行 j 列为 1 其他为 0 的矩阵。

(2) 求 $\mathfrak{U}$ 的特征值和对应的特征向量

六、实对称方阵 A, B, 满足 $AB = BA$

(1) 证明 A, B 存在公共特征向量 $\boldsymbol{v}$

(2) 证明存在正交方阵 P 使得 $P^T AP, P^T BP$ 都是对角阵

装……………订……………线

中国科学技术大学数学科学学院

2023 ~ 2024 学年第 2 学期期中考试试卷

■ A 卷　　□ B 卷

课程名称 线性代数 (B1)　　课程编号 MATH1009

考试时间 2024 年 5 月 18 日　　考试形式 闭卷

姓名 ______　学号 ______　学院 ______

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分
得分								

一、【30 分】填空题.

(1) 在关于 x 的多项式 $f(x)=\begin{vmatrix} 2 & x & -5 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & -2 & -3 \\ -1 & 7 & -2 & -2 \end{vmatrix}$ 中, 一次项的系数是______.

(2) 方程 $\boldsymbol{X}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ 的解为 $\boldsymbol{X}=$ ______.

(3) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^n=$ ______.

(4) 对于行列式 $|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & x & y \end{vmatrix}$, 若其代数余子式的和 $A_{11}+A_{12}+A_{13}=1$, 则 $|\boldsymbol{A}|=$ ______.

(5) 对于矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & -6 & 2 & a \end{pmatrix}$, 若存在列向量 $\boldsymbol{b}\in\mathbb{R}^3$ 使得线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 无解, 则 $a=$ ______.

(6) 线性空间 $\mathbb{R}^{2\times 2}$ 中向量组 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ 的秩是______.

二、【20 分】判断下面的说法是否正确, 并简要说明理由或者举出反例.

(1) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n \times n$ 方阵, $\boldsymbol{b}$ 为 n 维列向量. 若线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 只有唯一解, 则线性方程组 $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 也只有唯一解.

(2) 对于任意 $m \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $n \times m$ 矩阵 $\boldsymbol{B}$, 有 $\det(\boldsymbol{AB}) = \det(\boldsymbol{BA})$.

(3) 设 $n \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{I}_n$, 则 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}_n$ 或 $\boldsymbol{A} = -\boldsymbol{I}_n$.

(4) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系, 则

$$\boldsymbol{\alpha}_1 + 2\boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3, 2\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + 2\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3$$

也是齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系.

三、【12 分】当 a 为何值时, 如下的线性方程组有解? 当有解时, 求出它的所有解.

$$\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + ax_2 + x_3 + x_4 = a, \\ x_1 + x_2 + ax_3 + x_4 = a^2, \\ x_1 + x_2 + x_3 + ax_4 = a^3. \end{cases}$$

线

订

装

四、【8 分】计算 4 阶行列式 $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ x+1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$.

五、【10 分】设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 求它的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$.

六、【12 分】设 $n \geq 2$ 为正整数, $\mathbb{R}_{n-1}[x]$ 表示次数小于 n 的所有实系数多项式构成的线性空间. 对于正整数 k, 用 V_k 表示 $\mathbb{R}_{n-1}[x]$ 中满足 $\int_0^k f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ 的多项式的集合.

(1) 证明: V_k 是 $\mathbb{R}_{n-1}[x]$ 的线性子空间.

(2) 对于 $j = 1, \ldots, n-1$, 设 $f_j(x) = 1 - \dfrac{j+1}{k^j} x^j$. 证明: $f_1, \ldots, f_{n-1}$ 是 V_k 的一组基.

(3) 设多项式 $f(x)$ 满足 $f(x) \in \bigcap_{k=1}^n V_k$. 证明: $f(x) = 0$.

线

订

装

七、【8 分】

(1) 设矩阵 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ 依次为 $m \times n, n \times s, s \times t$ 矩阵. 证明下列关于矩阵的秩的不等式:

$$r(\boldsymbol{ABC}) \geq r(\boldsymbol{AB}) + r(\boldsymbol{BC}) - r(\boldsymbol{B}).$$

(2) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵. 证明:

$$r(\boldsymbol{A}^n) = r(\boldsymbol{A}^{n+1}) = r(\boldsymbol{A}^{n+2}) = \cdots.$$

LA24 春 final

一、[每小题 5 分，共 30 分] 填空题

1. 考虑$\mathbb{R}^3$ 中的线性变换 $\mathcal{A}(x,y,z)^{\mathbf{T}}=(-x+y+2z,2x+2y-2z,x+5y+z)^{\mathbf{T}}$. 则 $\mathcal{A}$ 将 $\mathbb{R}^3$ 映射后的像的集合是 $\mathbb{R}^3$ 的子空间，称为 $\mathcal{A}$ 的像空间，记为 Im($\mathcal{A}$). 给出 $Im(\mathcal{A})$ 的任意一组基 ________

2. 已知$P^{-1}AP=\mathrm{diag}(1,2,3)$, 其中$P=(\alpha,\beta,\gamma)$. 取$Q=(\alpha-\beta,\beta,\beta+\gamma)$, 则$Q^{-1}AQ=$ ____________

3. 已知矩阵$A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&x&-2\\-2&-2&y\end{pmatrix}$ 与$B=\begin{pmatrix}2&&\\&z&\\&&2\end{pmatrix}$ 相似, 则$z=$ ________

4.设A 为3 阶方阵, 满足 $\det(A+cI_3)=0,(c=1,2,3)$. 则对任意的k, $\det(A+kI_3)=$ ________

5. 设欧氏空间 V 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的度量矩阵为 $\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&2&1\\0&1&4\end{pmatrix}$. 考虑 V 中向量 $\beta=\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3$. 则 β 的长度为 ________

6. 已知实二次型 $x_1^2+2x_2^2+2x_3^2+tx_1x_2-x_1x_3+x_2x_3$ 正定. 则参数 t 的取值范围是 ________

二、【每小题 5 分 (判断正误 2 分，理由 3 分)】判断题

1. 设 A 是 n 阶实对称矩阵, 则 A 与它的伴随矩阵 A^* 必相合

2. 设 V 是 n 维线性空间, $\mathcal{A}$ 是 V 上的线性变换. 若 $\mathcal{A}$ 在 V 的任意基下的矩阵都相等, 则 $\mathcal{A}$ 是 V 上的数乘变换.

3. 设 A, B 为 n 阶正交矩阵, 满足 |A| + |B| = 0. 则 |A + B| = 0.

4. 设 $M=\begin{pmatrix} A & B \\ B^{\mathrm{T}} & D \end{pmatrix}$ 为实对称正定矩阵,其中 A, D 皆为 n 阶方阵. 则有 $|M| \leq |A||D|$, 且等号成立当且仅当 $B=O$.

三、[5+10=15 分] 设 $\mathbb{R}^3$ 中的线性变换 $\mathcal{A}$ 将

$$\alpha_1=(0,\,0,\,1)^{\mathrm{T}},\quad \alpha_2=(0,\,1,\,1)^{\mathrm{T}},\quad \alpha_3=(1,\,1,\,1)^{\mathrm{T}}$$

变换到

$$\beta_1=(-3,\,1,\,0)^{\mathrm{T}},\quad \beta_2=(-3,\,-1,\,0)^{\mathrm{T}},\quad \beta_3=(5,\,1,\,4)^{\mathrm{T}}.$$

(1) 求 $\mathcal{A}$ 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下的矩阵 A.

(2) 求 $\mathbb{R}^3$ 中的另一组基 ξ_1, ξ_2, ξ_3, 使得 $\mathcal{A}$ 在 ξ_1, ξ_2, ξ_3 下的矩阵为对角阵 C, 并写出 C.

四、[2+8=10 分]

记 V 为所有的 2 阶实对称方阵构成的实线性空间. 对于 V 中任意两个矩阵，定义

$$(\,A,\,B\,)=\mathrm{tr}(AB)$$

易知 $(V, (\cdot,\cdot))$ 构成一个欧式空间.

(1) 考虑 V 中向量 $A_1=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_2=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. 将 A_1, A_2 扩充成 V 的一组基 Γ_1.

(2) 利用 Schmidt 正交化，认 Γ_1 构造 V 的一组标准正交基 Γ_2.

五、[12+5=17 分] 考虑二次曲面

$$x^2 - y^2 - 4xz - 4yz + 2y + z = 0 \quad (\star)$$

(1) 通过旋转和平移变换将 $(\star)$ 化为标准形式. 写清楚变换过程和最后的标准方程，并指出该曲面的类型.

(2) 求 (1) 中所用旋转变换的旋转轴的方向及旋转角度.

六、[8 分] 考虑实对角阵 $A = \begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix}$, 其中 $a_1 > a_2 > \cdots > a_n > 0$. 设 P, Q 为 n 阶正交矩阵，且 $PA = AQ$. 证明：$P = Q$.