2026 年春季李皓昭班实分析期中考试，考试时间 5 月 13 日 9:45 12:10，总分 110 分.

一、(40 分)

(1). 给出本课程中外测度的定义；

(2). 利用上述外测度的定义计算欧氏空间中闭方体的外测度。

(3). 什么是外测度的“可数次可加性”? 举例说明外测度不满足“可数可加性”，并简要说明理由。

(4). 设 $\{A_n\}$ 是一列互不相交的可测集，$B_n \subset A_n (n = 1, 2, \cdots)$. 求证：

$$m_*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m_*(B_n).$$

二、(10 分) 设 E_k 是一列可测集，且 $E_k \subset [0, 1]$,$m(E_k) = 1 (k = 1, 2 \cdots)$. 求证：

$$m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k\right) = 1.$$

三、(10 分) 设 E 是可测集，且 $m(E) < \infty$. 若 $\{f_n(x)\}$ 是 E 上一列可测函数，则 f_n 在 E 上几乎处处收敛于 0 的充分必要条件是函数列 $g_n(x) = \sup_{k \geq n} |f_k(x)|$ 在 E 上依测度收敛于 0.

四、(10 分) 设 $f_n(x)$ 是 $[0, 1]$ 上的非负可积函数列，且 $\{f_n(x)\}$ 在 $[0, 1]$ 上依测度收敛于 $f(x)$. 若有

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} f_n(x)\, \mathrm{d}x = \int_{[0,1]} f(x)\, \mathrm{d}x,$$

求证对 $[0, 1]$ 的任何可测子集 E, 有

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\, \mathrm{d}x = \int_E f(x)\, \mathrm{d}x.$$

五、(10 分) 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上 Riemann 可积，求证：$f(x^2)$ 也在 $[0, 1]$ 上 Riemann 可积。

六、(10 分)

(1). 叙述 Lebesgue 控制收敛定理。

(2). 利用上述定理计算：

$$I = \lim_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^n}\, \mathrm{d}x.$$

七、(10 分) 设 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上可积，定义 $g(x) = \int_x^1 t^{-1} f(t)\, \mathrm{d}t (x \in (0, 1))$。求证：$g(x)$ 在 $(0, 1)$ 上可积，且有

$$\int_0^1 g(x)\, \mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\, \mathrm{d}x.$$

八、(10 分) 设 $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是实数列，且 $\lim_{n\to\infty\lambda_n} = +\infty$. 求证：集合

$$E = \left\{x \in \mathbb{R} | \lim_{n\to\infty} \sin(\lambda_n x) 存在\right\}$$

是零测集。