中国科学技术大学

2025–2026 学年实分析期中考试

1. **(10 分)** 设 C 为 $[0,1]$ 中的标准 Cantor 三分集。求 C 的 Lebesgue 测度 $m(C)$，并说明理由。

2. **(10 分)** 设 $A, B \subset \mathbb{R}$ 是可测集，且 $A \cap B = \varnothing$。令

$$f := 2\chi_A + 3\chi_B + 4\chi_{A\cup B}.$$

求 $\int_{\mathbb{R}} f$（用 $m(A), m(B)$ 表示）。

3. **(10 分)** 设 $f_n(x) = n^{\alpha}\chi_{(0,1/n)}(x)$，$x \in [0,1]$，其中 $\alpha \in \mathbb{R}$，χ 为示性函数。

   (a) 讨论 α 取何值时，f_n 在 $[0,1]$ 上几乎处处收敛于 f?

   (b) 讨论 α 取何值时，f_n 在 $[0,1]$ 上依测度收敛于 f?

   (c) 讨论 α 取何值时，f_n 在 $[0,1]$ 上依 L^1 范数收敛于 f?

4. **(10 分)** 设 $g \in L^1(\mathbb{R})$，定义

$$f_n(x) = g(x) \cdot \frac{\sin(nx)}{n}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

证明：

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,dx = 0.$$

5. **(15 分)** 计算积分

$$I = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-xy}\sin x\,dx\,dy.$$

6. **(15 分)** 叙述 Fatou 引理和 Lebesgue 单调收敛定理的内容，并用 Fatou 引理证明 Lebesgue 单调收敛定理。

7. **(15 分)** 设 f 是 $[0,1]$ 上的 Lebesgue 可测函数，且 $|f(x)| \le 1$ a.e.。证明：对任意 $\varepsilon > 0$，存在连续函数 g 在 $[0,1]$ 上，使得

$$m(\{x \in [0,1] : f(x) \neq g(x)\}) < \varepsilon.$$

8. **(15 分)** 设 $\{f_n\}$ 为可测函数序列，满足 $|f_n| \le g$，其中 $g \in L^1$，且 f_n 依测度收敛于 f。

   (a) 证明：$\int f_n \to \int f$。

   (b) 证明：f_n 在 L^1 中收敛于 f，即 $\int |f_n - f| \to 0$。