中国科学技术大学期末考试

2025—2026 学年第 2 学期

课程名称：实分析

学生姓名：________________　　　学　　号：________________

说明： 1. 证明过程要求严密详细。除重要定理和性质外，不得直接使用例题或者作业题。
2. 除非特别说明，可测均为欧式空间中的 Lebesgue 可测，可积均为 Lebesgue 可积。

一、（20 分）

(1). 给出 G_δ, F_σ 集的定义；

(2). 利用上述定义证明欧式空间中的闭集是 G_δ 集；

(3). 求证：E 可测当且仅当存在 F_σ 集 $F \subset E$ 使得 $m_*(E \setminus F) = 0$。

二、（20 分）

(1). 给出可测集 E 上一列可测函数几乎处处收敛和依测度收敛的定义；

(2). 举例并说明理由：存在可测函数列几乎处处收敛但不依测度收敛；

(3). 求证：若 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ 在 $\mathbb{R}$ 上依测度收敛于 f，且 $f_n \geq 0, a.e.$，则 $f \geq 0, a.e.$

三、（10 分）

设 $E \subset \mathbb{R}$ 可测，且 $m(E) > 0$。求证：存在 $x_0 \in E$ 使得

$$\lim_{r \to 0^+} \frac{m(E \cap (x_0 - r, x_0 + r))}{2r} = 1.$$

四、（10 分）

设 f 是可测集 $E \subset \mathbb{R}^d$ 上的可测函数，且 $f \geq 0$ 且 $\int_E f dx < \infty$。求证：对任意 $\epsilon > 0$，存在可测集 $A \subset E$，满足 $m(A) < \infty$ 且

$$\int_A f \geq \int_E f - \epsilon.$$

五、（10 分）

设 $f \in L^1(\mathbb{R})$ 满足

$$\limsup_{h \to 0} \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right| dx = 0.$$

求证：f 在 $\mathbb{R}$ 上几乎处处为零。

六、（15 分）

(1). 给出区间 $[a, b]$ 上绝对连续函数的定义。

(2). 若 f 是 $[a, b]$ 上的连续实值有界变差函数，且

$$\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a).$$

(a) f 在 $[a, b]$ 上是否绝对连续？请给出证明或举出反例并说明理由。

(b) 若另外假设 f 在 $[a, b]$ 上单调递增，求证 f 绝对连续。

七、（15 分）

设 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}, f$ 为 $\mathbb{R}$ 上可测函数，若 $f_n \to f, a.e.$，且

$$\int_{\mathbb{R}} |x||f_n(x)| dx \leq 100, \quad \int_{\mathbb{R}} |f_n(x)|^2 dx \leq 100, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

求证：

(1). 对任意 $n \in \mathbb{N}$，f_n 在 $\mathbb{R}$ 上可积；

(2). f 在 $\mathbb{R}$ 上可积；

(3). $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_{\mathbb{R}} |f_n - f| dx = 0$。

中国科学技术大学期末考试解答 (最终完善版)

2025—2026 学年第 2 学期　实分析

一、（20 分）

(1). 给出 G_δ, F_σ 集的定义；

答：

- **G_δ 集**：可数个开集的交集称为 G_δ 集，即若存在开集序列 $\{O_n\}_{n=1}^\infty$，使得 $E=\bigcap_{n=1}^\infty O_n$，则 E 为 G_δ 集。
- **F_σ 集**：可数个闭集的并集称为 F_σ 集，即若存在闭集序列 $\{F_n\}_{n=1}^\infty$，使得 $E=\bigcup_{n=1}^\infty F_n$，则 E 为 F_σ 集。

(2). 利用上述定义证明欧式空间中的闭集是 G_δ 集；

证明：设 $F\subset\mathbb{R}^d$ 为任意闭集。对于任意正整数 n，定义集合：

$$O_n=\left\{x\in\mathbb{R}^d : d(x,F)<\frac{1}{n}\right\}$$

其中 $d(x,F)=\inf_{y\in F}d(x,y)$。由于距离函数 $x\mapsto d(x,F)$ 是连续函数，所以作为开区间 $(-\infty,\frac{1}{n})$ 的原像，O_n 都是开集。显然，若 $x\in F$，则 $d(x,F)=0<\frac{1}{n}$，故 $F\subset O_n$，进而 $F\subset\bigcap_{n=1}^\infty O_n$。反之，若 $x\in\bigcap_{n=1}^\infty O_n$，则对任意 $n\in\mathbb{N}^+$，有 $d(x,F)<\frac{1}{n}$。令 $n\to\infty$，得到 $d(x,F)=0$。因为 F 是闭集，点到闭集的距离为 0 意味着点在闭集内，故 $x\in F$。因此 $F=\bigcap_{n=1}^\infty O_n$。由定义可知，闭集 F 是一系列开集 O_n 的可数交，故 F 是 G_δ 集。 □

(3). 求证：E 可测当且仅当存在 F_σ 集 $F\subset E$ 使得 $m_*(E\setminus F)=0$。

证明： **充分性 ($\Leftarrow$)**：已知存在 F_σ 集 $F\subset E$ 满足 $m_*(E\setminus F)=0$。因为 F_σ 集是可数个闭集的并，而闭集是 Borel 集从而 Lebesgue 可测，故 F 是可测集。又因为外测度 $m_*(E\setminus F)=0$，由 Lebesgue 测度的完备性知 $E\setminus F$ 也是可测集。由于 $E=F\cup(E\setminus F)$，两个可测集的并依然可测，故 E 是可测集。

必要性 ($\Rightarrow$)：已知 E 可测。分两种情况讨论：情况一：$m(E)<\infty$。由 Lebesgue 测度的内正则性，对任意 $n\in\mathbb{N}^+$，存在闭集 $K_n\subset E$，使得 $m(E\setminus K_n)<\frac{1}{n}$。令 $F=\bigcup_{n=1}^\infty K_n$。显然 F 是 F_σ 集，且 $F\subset E$。因为 $E\setminus F\subset E\setminus K_n$，所以对任意 n，有 $m_*(E\setminus F)\le m(E\setminus K_n)<\frac{1}{n}$。令 $n\to\infty$ 得 $m_*(E\setminus F)=0$。情况二：$m(E)=\infty$。令 $E_k=E\cap\{x\in\mathbb{R}^d:|x|\le k\}$。则每个 E_k 都是有界可测集，且 $m(E_k)<\infty$。由情况一，对每个 E_k，存在 F_σ 集 $F_k\subset E_k$ 使

得 $m(E_k \setminus F_k) = 0$。令 $F = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$。因为可数个 F_σ 集的并仍是 F_σ 集，故 F 为 F_σ 集，且 $F \subset E$。又因为 $E \setminus F = (\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k) \setminus (\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k) \subset \bigcup_{k=1}^{\infty}(E_k \setminus F_k)$。从而根据次可加性：$m_*(E \setminus F) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m(E_k \setminus F_k) = 0$。证明完毕。 □

二、（20 分）

(1). 给出可测集 E 上一列可测函数几乎处处收敛和依测度收敛的定义；

答： 设 $\{f_n\}$ 是定义在可测集 E 上的可测函数列，f 是 E 上的可测函数。

- **几乎处处收敛 (converge a.e.)：** 若使得 $\lim_{n\to\infty} f_n(x) \neq f(x)$ 不成立的点集是零测集，即

  $$m(\{x \in E : \lim_{n\to\infty} f_n(x) \neq f(x)\}) = 0$$

  则称 $\{f_n\}$ 在 E 上几乎处处收敛于 f。

- **依测度收敛 (converge in measure)：** 若对任意的 $\epsilon > 0$，都有

  $$\lim_{n\to\infty} m(\{x \in E : |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon\}) = 0$$

  则称 $\{f_n\}$ 在 E 上依测度收敛于 f。

(2). 举例并说明理由：存在可测函数列几乎处处收敛但不依测度收敛。

答： **例子：** 设 $E = \mathbb{R}$，定义 $f_n(x) = \chi_{[n,n+1]}(x)$，即在区间 $[n, n+1]$ 上为 1，其余地方为 0 的特征函数。**理由：**

- **几乎处处收敛：** 对于任意固定的实数 $x \in \mathbb{R}$，只要 $n > x$，区间 $[n, n+1]$ 就会移到 x 的右侧，此时 $f_n(x) = 0$。因此对每一个点，都有 $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$。所以 $\{f_n\}$ 在 $\mathbb{R}$ 上处处（从而几乎处处）收敛于恒零函数 $f(x) \equiv 0$。

- **不依测度收敛：** 取固定值 $\epsilon = \frac{1}{2}$，则满足条件的点集 $\{x \in \mathbb{R} : |f_n(x) - 0| \geq \frac{1}{2}\} = [n, n+1]$。该区间的测度为 $m([n, n+1]) = 1$。显然，当 $n \to \infty$ 时，测度的极限为 $\lim_{n\to\infty} 1 = 1 \neq 0$。故 $\{f_n\}$ 不依测度收敛于 0。

(3). 求证：若 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $\mathbb{R}$ 上依测度收敛于 f，且 $f_n \geq 0, a.e.$，则 $f \geq 0, a.e.$

证明： 因为 $\{f_n\}$ 在 $\mathbb{R}$ 上依测度收敛于 f，由里斯 (F. Riesz) 定理，存在一个子列 $\{f_{n_k}\}$，使得该子列几乎处处收敛于 f。即存在零测集 Z_0，当 $x \notin Z_0$ 时，$\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x) = f(x)$。又已知对每个 k，$f_{n_k} \geq 0$ a.e.，故存在零测集 Z_k，当 $x \notin Z_k$ 时，$f_{n_k}(x) \geq 0$。令 $Z = Z_0 \cup (\bigcup_{k=1}^{\infty} Z_k)$，则 Z 是可数个零测集的并，仍是零测集（$m(Z) = 0$）。对任意 $x \in \mathbb{R} \setminus Z$，不仅有 $\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x) = f(x)$，且对所有 k 都有 $f_{n_k}(x) \geq 0$。由数列极限的保号性，非负数列的极限必非负，得 $f(x) = \lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x) \geq 0$。由于 $m(Z) = 0$，故 $f \geq 0, a.e.$ 证明完毕。 □

三、（10 分）

设 $E \subset \mathbb{R}$ 可测，且 $m(E) > 0$。求证：存在 $x_0 \in E$ 使得

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{m(E\cap(x_0-r,x_0+r))}{2r} = 1.$$

证明：考虑集合 E 的特征函数 $\chi_E(x)$。因为 E 是可测集，所以 $\chi_E(x)$ 是可测函数。且对于任何有界区间 $[a,b]$，$\int_a^b |\chi_E(x)|dx \leq b-a < \infty$，故 χ_E 是局部可积的。根据 Lebesgue 微分定理（又称 Lebesgue 密度定理），对于几乎所有的 $x \in \mathbb{R}$，有：

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{1}{2r}\int_{x-r}^{x+r} \chi_E(t)dt = \chi_E(x)$$

在上式中，积分项 $\int_{x-r}^{x+r} \chi_E(t)dt$ 的几何意义正是相交区域的测度 $m(E\cap(x-r,x+r))$。因此：

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{m(E\cap(x-r,x+r))}{2r} = \chi_E(x) \quad a.e.\ x\in\mathbb{R}$$

令 Z 为上述等式不成立的点集，由定理知 $m(Z) = 0$。已知 $m(E) > 0$，因此集合 $E \setminus Z$ 绝不可能为空集（否则 $E \subset Z$，会导致 $m(E) \leq m(Z) = 0$，产生矛盾）。所以，必然存在一个点 $x_0 \in E \setminus Z$。因为 $x_0 \in E$，所以 $\chi_E(x_0) = 1$。又因为 $x_0 \notin Z$，上述极限等式在 x_0 处成立，代入得：

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{m(E\cap(x_0-r,x_0+r))}{2r} = \chi_E(x_0) = 1$$

证明完毕。 □

四、（10 分）

设 f 是可测集 $E \subset \mathbb{R}^d$ 上的可测函数，且 $f \geq 0, \int_E f dx < \infty$。求证：对任意 $\epsilon > 0$，存在可测集 $A \subset E$，满足 $m(A) < \infty$ 且 $\int_A f \geq \int_E f - \epsilon$。

证明：对于每个正整数 $n \in \mathbb{N}^+$，构造集合序列：

$$A_n = \{x \in E : |x| \leq n \text{ 且} f(x) \leq n\}$$

显然 $A_n \subset E$ 都是可测集。因为 A_n 被包含在半径为 n 的有界球 $B(0,n)$ 内，所以其测度显然有限，即 $m(A_n) \leq m(B(0,n)) < \infty$。

相应地，定义可测函数序列 $g_n(x) = f(x)\chi_{A_n}(x)$。由于集合序列是递增的（$A_n \subset A_{n+1}$），且已知 $f \geq 0$，因此函数序列也具有单调递增性，即对任意 $x \in E$，有：

$$0 \leq g_1(x) \leq g_2(x) \leq \cdots \leq g_n(x) \leq \dots$$

下面考虑 $g_n(x)$ 的逐点极限：

- 若 $f(x) < \infty$，当 n 充分大时（满足 $n \geq |x|$ 且 $n \geq f(x)$），点 x 必属于 A_n，此时 $g_n(x) = f(x)$。

- 若 $f(x)=\infty$，则对所有 n 都有 $g_n(x)=0$。但由于已知 $\int_E f dx<\infty$，函数值等于无穷大的点集 $\{x\in E: f(x)=\infty\}$ 必须是零测集。

因此，在 E 上几乎处处有 $\lim_{n\to\infty} g_n(x)=f(x)$ a.e.

由实分析中的**单调收敛定理 (Monotone Convergence Theorem)**，单调非负函数序列的积分与极限可以交换：

$$\lim_{n\to\infty}\int_{A_n} f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\int_E g_n(x)dx=\int_E f(x)dx$$

因为已知 $\int_E f dx<\infty$（即为一个有限实数），根据数列极限的定义，对于任意给定的 $\epsilon>0$，必然存在一个足够大的正整数 N，使得：

$$\int_E f dx-\int_{A_N} f dx<\epsilon \implies \int_{A_N} f dx>\int_E f dx-\epsilon$$

取可测集 $A=A_N$，则 $A\subset E$ 且 $m(A)<\infty$，且满足 $\int_A f\geq\int_E f-\epsilon$。证明完毕。 □

五、（10 分）

设 $f\in L^1(\mathbb{R})$ 满足 $\limsup_{h\to 0}\int_{\mathbb{R}}\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right|dx=0$。求证：$f$ 在 $\mathbb{R}$ 上几乎处处为零。

证明：任取两个实数 $a,b\in\mathbb{R}$ (设 $a<b$)，构造如下积分：

$$I_h=\int_a^b\frac{f(x+h)-f(x)}{h}dx$$

由于 $f\in L^1(\mathbb{R})$，利用积分的线性性质及变量代换，可以将上述积分项进行平移拆分：

$$I_h=\frac{1}{h}\int_a^b f(x+h)dx-\frac{1}{h}\int_a^b f(x)dx=\frac{1}{h}\int_b^{b+h} f(x)dx-\frac{1}{h}\int_a^{a+h} f(x)dx$$

根据 Lebesgue 微分定理，可积函数在几乎所有点的导数等于其本身。因此，除去一个零测集 Z 之外，若选取 $a,b\notin Z$，当 $h\to 0$ 时，上式右端的两个平均积分值分别收敛于函数在 b 和 a 处的取值：

$$\lim_{h\to 0} I_h=f(b)-f(a)$$

另一方面，我们对 I_h 放大积分区域到整个实轴 $\mathbb{R}$，并套入绝对连续放大：

$$|I_h|\leq\int_a^b\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right|dx\leq\int_{\mathbb{R}}\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right|dx$$

根据题目给出的已知条件，当 $h\to 0$ 时，最右边项的上极限为 0。由夹逼准则可知：

$$\lim_{h\to 0} I_h=0$$

两相触通，对于任意满足 $a,b\notin Z$ 的点（几乎处处），都有：

$$f(b)-f(a)=0\implies f(b)=f(a)=C\quad(C\text{ 为常数})$$

这说明函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上几乎处处等于一个常数 C。然而已知 $f\in L^1(\mathbb{R})$ 保证了 $\int_{\mathbb{R}}|f(x)|dx<\infty$。若常数 $C\neq 0$，则 $\int_{\mathbb{R}}|C|dx=\infty$ 必发散矛盾。因此必然有 $C=0$，即 $f(x)=0, a.e.$ 证明完毕。 □

六、（15 分）

(1)．给出区间 $[a,b]$ 上绝对连续函数的定义。

答： 函数 f 定义在 $[a,b]$ 上。如果对于任意给定的 $\epsilon>0$，都存在 $\delta>0$，使得对于 $[a,b]$ 中任意有限个互不相交的开区间 $(a_1,b_1),(a_2,b_2),\ldots,(a_n,b_n)$，只要它们的长度之和满足 $\sum_{i=1}^{n}(b_i-a_i)<\delta$，就有

$$\sum_{i=1}^{n}|f(b_i)-f(a_i)|<\epsilon$$

则称函数 f 在 $[a,b]$ 上是绝对连续的。

(2)．若 f 是 $[a,b]$ 上的连续实值有界变差函数，且 $\int_a^b f'(x)dx=f(b)-f(a)$。

(a) f 在 $[a,b]$ 上是否绝对连续？请给出证明或举出反例并说明理由。

答：否，不一定绝对连续。反例： 利用区间 $[0,1]$ 上的康托函数 (Cantor function) $C(x)$。已知 $C(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续且单调递增，具有有界变差，且满足 $C(0)=0,C(1)=1$。最关键的是，$C'(x)=0,a.e.$ 且 $C(x)$ 并非绝对连续。我们在区间 $[0,2]$ 上拼接构造函数 $f(x)$ 如下：

$$f(x)=\begin{cases}C(x), & x\in[0,1]\\ C(2-x), & x\in(1,2]\end{cases}$$

理由： 1) $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续（因为在分界点 $x=1$ 处左极限和右极限皆为 $C(1)=1$）。2) $f(x)$ 是有界变差函数：在 $[0,1]$ 递增变差为 1，在 $[1,2]$ 递减变差为 1，总变差为 2。3) 几乎处处求导可得 $f'(x)=0,a.e.\ x\in[0,2]$。因此 $\int_0^2 f'(x)dx=0$。而端点增量 $f(2)-f(0)=C(0)-C(0)=0$。完美满足条件 $\int_0^2 f'(x)dx=f(2)-f(0)$。4) 然而 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上不绝对连续，否则它在子区间 $[0,1]$ 上也应绝对连续，这与康托函数不绝对连续相矛盾。

(b) 若另外假设 f 在 $[a,b]$ 上单调递增，求证 f 绝对连续。

证明： 对于单调递增函数 f，由微积分基本定理的推广知：$f'(x)$ 几乎处处存在、非负且勒贝格可积。并且，在任意子区间上，导数的积分总是被函数值的端点增量所控制。任取一个点 $x\in[a,b]$，我们在区间 $[a,x]$ 和 $[x,b]$ 上分别列出该不等式关系：

$$\int_a^x f'(t)dt\le f(x)-f(a)\quad 以及\quad \int_x^b f'(t)dt\le f(b)-f(x)$$

将上述两个非负不等式相加，可以得到：

$$\int_a^b f'(t)dt=\int_a^x f'(t)dt+\int_x^b f'(t)dt\le(f(x)-f(a))+(f(b)-f(x))=f(b)-f(a)$$

即总积分形式：$\int_a^b f'(t)dt\le f(b)-f(a)$。但根据题目已知给定的条件，该式严格取等号，即 $\int_a^b f'(t)dt=f(b)-f(a)$。基于非负各项的加和性，如果前面两个分支不等式中有任何一个是严格的“小于号”，两项相加后就必然导致总体严格小于 $f(b)-f(a)$，从而引发矛盾。因此，对于任意选取的 $x\in[a,b]$，分支不等式必须全部严格取等号，即：

$$\int_a^x f'(t)dt=f(x)-f(a)\implies f(x)=f(a)+\int_a^x f'(t)dt$$

由于 $f'(t)$ 是一个 L^1 可积函数，上式表明 $f(x)$ 可以表示为一个可积函数的变上限积分加上一个常数。由变上限积分的经典性质，任何可积函数的变上限积分必为绝对连续函数。故 f 在 $[a,b]$ 上绝对连续。证明完毕。 $\square$

七、（15 分）

设 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}, f$ 为 $\mathbb{R}$ 上可测函数，若 $f_n \to f, a.e.$，且 $\int_{\mathbb{R}} |x||f_n(x)|dx \leq 100, \int_{\mathbb{R}} |f_n(x)|^2 dx \leq 100, \forall n \in \mathbb{N}$。求证：

(1). 对任意 $n \in \mathbb{N}$，f_n 在 $\mathbb{R}$ 上可积；

证明： 将全实轴积分域划分为内部有界区间 $A = [-1,1]$ 和外部区域 $B = \mathbb{R} \setminus [-1,1]$ 两部分。对于内部区域 A，利用柯西-施瓦茨 (Cauchy-Schwarz) 不等式：

$$\int_A |f_n(x)|dx = \int_A |f_n(x)| \cdot 1 dx \leq \left(\int_A |f_n(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_A 1^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

由题意，$\int_A |f_n(x)|^2 dx \leq \int_{\mathbb{R}} |f_n(x)|^2 dx \leq 100$，且区间长度 $m(A) = 2$，故：

$$\int_A |f_n(x)|dx \leq \sqrt{100} \cdot \sqrt{2} = 10\sqrt{2}$$

对于外部区域 B，由于对所有点均满足 $|x| > 1$，从而有 $1 < |x|$，可直接放大：

$$\int_B |f_n(x)|dx \leq \int_B |x||f_n(x)|dx \leq \int_{\mathbb{R}} |x||f_n(x)|dx \leq 100$$

将两部分合并相加，得到总体积分控制：

$$\int_{\mathbb{R}} |f_n(x)|dx = \int_A |f_n(x)|dx + \int_B |f_n(x)|dx \leq 10\sqrt{2} + 100 < \infty$$

故对任意 $n \in \mathbb{N}$，$f_n \in L^1(\mathbb{R})$，即 f_n 在 $\mathbb{R}$ 上可积。 $\square$

(2). f 在 $\mathbb{R}$ 上可积；

证明： 已知 $f_n \to f, a.e.$，由法图 (Fatou) 引理，函数极限的积分受限于积分的下极限：

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} \liminf_{n\to\infty} |f_n(x)|^2 dx \leq \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} |f_n(x)|^2 dx \leq 100$$

$$\int_{\mathbb{R}} |x||f(x)|dx = \int_{\mathbb{R}} \liminf_{n\to\infty} |x||f_n(x)|dx \leq \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} |x||f_n(x)|dx \leq 100$$

由此可见，极限函数 f 完美继承了与 f_n 完全相同的两个积分控制上界。接下来，直接套用与第 (1) 问完全一致的区间拆分放缩法（即分别在 $[-1,1]$ 和外部放大），即可得出：

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|dx \leq 10\sqrt{2} + 100 < \infty$$

故 f 在 $\mathbb{R}$ 上同样是勒贝格可积的。 $\square$

(3). $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} |f_n - f|dx = 0$。

证明：对任意给定的 $\epsilon > 0$，我们通过将积分域作“三段式”拆分，利用基础的叶戈罗夫 (Egorov) 定理来严谨证明。

第一步：控制无穷远处的尾部区域积分当 $|x| > M$ 时，显然有 $\frac{|x|}{M} > 1$。我们可以把尾部积分扣住：

$$\int_{|x|>M} |f_n(x)|dx \leq \int_{|x|>M} \frac{|x|}{M}|f_n(x)|dx \leq \frac{1}{M}\int_{\mathbb{R}} |x||f_n(x)|dx \leq \frac{100}{M}$$

同理，对极限函数 f 也有 $\int_{|x|>M} |f(x)|dx \leq \frac{100}{M}$。为此，我们只需挑选一个足够大的截断常数 M，使得 $\frac{200}{M} < \frac{\epsilon}{3}$。此时，令无穷远区域为 $I^c = \mathbb{R} \setminus [-M, M]$，则对所有 n 恒有：

$$\int_{I^c} |f_n - f|dx \leq \int_{I^c} |f_n|dx + \int_{I^c} |f|dx \leq \frac{200}{M} < \frac{\epsilon}{3}$$

第二步：在有限区间上利用 Egorov 定理剥离“坏集”考虑核心有限区间 $I = [-M, M]$，其测度 $m(I) = 2M < \infty$。在此区间上已知 $f_n \to f, a.e.$ 由 **Egorov 定理**，对任意小的正数 $\delta > 0$，存在一个“坏子集” $E_\delta \subset I$，其测度满足 $m(E_\delta) < \delta$，且在剩余的“好集” $I \setminus E_\delta$ 上 f_n **一致收敛**于 f。我们先来估计坏集 E_δ 上的积分。利用 Cauchy-Schwarz 不等式：

$$\int_{E_\delta} |f_n|dx \leq \left(\int_{E_\delta} |f_n|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} (m(E_\delta))^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{100} \cdot \sqrt{\delta} = 10\sqrt{\delta}$$

同理可得 $\int_{E_\delta} |f|dx \leq 10\sqrt{\delta}$。因此坏集上的积分为 $\int_{E_\delta} |f_n - f|dx \leq 20\sqrt{\delta}$。现在我们只需让 δ 足够小，使其满足 $20\sqrt{\delta} < \frac{\epsilon}{3}$ 即可。

第三步：控制好集上的一致收敛积分在固定好的区域 $I \setminus E_\delta$ 上，由于 $f_n \to f$ 是一致收敛的，根据定义，必然存在一个正整数 N，当 $n > N$ 时，对该区域内的所有 x，都有：

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{3 \cdot 2M}$$

因此，在这部分面积上的积分为：

$$\int_{I \setminus E_\delta} |f_n - f|dx \leq \frac{\epsilon}{6M} \cdot m(I \setminus E_\delta) \leq \frac{\epsilon}{6M} \cdot 2M = \frac{\epsilon}{3}$$

总结：综上所述，对于任意指定的 $\epsilon > 0$，只要 $n > N$，将整体积分拆成三块：

$$\int_{\mathbb{R}} |f_n - f|dx = \int_{I^c} |f_n - f|dx + \int_{E_\delta} |f_n - f|dx + \int_{I \setminus E_\delta} |f_n - f|dx$$

$$\int_{\mathbb{R}} |f_n - f|dx < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon$$

根据极限的定义，结论得证：$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} |f_n - f|dx = 0$。 □