1.2 26mid

Problem 1.6 题 1(10 分)

证明: 存在 $[0,1]$ 中的无处稠密集具有正测度.

Problem 1.7 题 2(10 分)

证明: 有理数集 $\mathbb{Q}$ 不是 G_δ 集.

Problem 1.8 题 3(10 分)

证明: $\mathbb{R}$ 上连续函数全体的基数为 $\mathfrak{c}$; 而 Lebesgue 可测函数全体的基数为 $2^{\mathfrak{c}}$.

Problem 1.9 题 4(10 分)

设 $E=[a,b]$, $f_n \to f$ a.e. on E, 且 $f_n, f \in L^+ \cap L^1(E)$, 并且

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_E f(x)\,\mathrm{d}x.$$

证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\int_E |f_n(x)-f(x)|\,\mathrm{d}x = 0$.

Problem 1.10 题 5(10 分)

利用积分的定义和 Lebesgue 控制收敛定理, 证明 Levi 单调收敛定理.

Problem 1.11 题 6(10 分)

判断 $\dfrac{\sin x}{x}$ 是否在 $[0,\infty)$ 上 Lebesgue 可积, 并给出理由.

Problem 1.12 题 7(10 分)

设 $E \subset [0,1]$ 是可测集且 $m(E)>0$. 证明: 存在 $x \in E$ 使得对无穷多个正整数 n, 有 $x+\dfrac{1}{n} \in E$(模 1 意义下, 即考虑圆上的加法).

Problem 1.13 题 8(10 分)

设 $f \in L^1(\mathbb{R})$, 定义其 Fourier 变换 $g(t)=\int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{e}^{-itx}\,\mathrm{d}x$. 证明: g 在 $\mathbb{R}$ 上一致连续.

Problem 1.14 题 9(10 分)

假设可测函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 保持加法运算, 证明 $f(x)=xf(1), \forall\, x\in\mathbb{R}$.

Problem 1.15 题 10(10 分)

设 f_n, f 在 E 上可测且 $f_n \to f$ 依测度收敛, g 是 $\mathbb{R}$ 上的连续函数. 证明: $g\circ f_n \to g\circ f$ 依测度收敛.