中国科学技术大学 2025－2026学年第二学期实分析(H) 期末考试试卷

2026 年 6 月 17 日

注意事项： 本试卷共10题，满分100分。
答题要求：步骤清晰，逻辑严谨。

题 1 (10分). 设 $F : [a, b] \to \mathbb{R}$。

若 $F'(x)$ 几乎处处存在，且 $F' \in L^1([a, b])$,

是否必然有

$$F(x) = F(a) + \int_a^x F'(t)\,dt, \qquad x \in [a, b]?$$

题 2 (10分). 设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 为 Lebesgue 可测集，且 $1 \le p < q \le \infty$。讨论 $L^p(E)$ 与 $L^q(E)$ 之间的包含关系。

题 3 (10分). 记 $\mathcal{R}[0,1]$ 为 $[0,1]$ 上所有 Riemann 可积函数构成的空间。在 $\mathcal{R}[0,1]$ 上定义

$$\|f\|_2 = \left(\int_0^1 |f(x)|^2\, dx\right)^{1/2}.$$

严格地说，我们把几乎处处相等的函数视为同一个元素。证明：$\mathcal{R}[0,1]$ 在 $\|\cdot\|_2$ 范数下不是完备空间。

题 4 (10分). 设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 为单调增加函数。记

$$E_\infty=\{x\in(a,b):f'(x)=+\infty\},$$

其中导数允许取扩展实数值。利用 Vitali 覆盖定理证明：

$$m(E_\infty)=0.$$

题 5 (10分). 设 $I=[\alpha,\beta]$，$J=[a,b]$ 为闭区间。记 $AC(I)$ 为 I 上的绝对连续函数全体。设 $g\in AC(I)$，$f\in AC(J)$，并且复合函数 $f\circ g$ 在 I 上有定义，即

$$g(I)\subset J.$$

是否必有

$$f\circ g\in AC(I)?$$

请证明或给出反例。

题 6 (10分). 设非负函数$f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$，并由 f 定义绝对连续测度 μ，即

$$d\mu = f\,dx.$$

也就是说，对任意可测集 $A \subset \mathbb{R}$，有

$$\mu(A) = \int_A f(t)\,dt.$$

设 $x \in \mathbb{R}$ 是 f 的一个 Lebesgue 点，即

$$\lim_{r \to 0^+} \frac{1}{2r} \int_{x-r}^{x+r} |f(t) - f(x)|\,dt = 0.$$

证明：

$$\lim_{r \to 0^+} \frac{\mu((x-r, x+r))}{2r} = f(x).$$

题 7 (10分). 设 $E \subset \mathbb{R}^2$ 为可测集，且

$$0 < |E| < \infty.$$

对 $x \in \mathbb{R}$，定义垂直切片

$$E_x = \{y \in \mathbb{R} : (x, y) \in E\}.$$

设

$$A(t) = |\{x \in \mathbb{R} : |E_x| > t\}|.$$

证明：

$$|E| = \int_0^\infty A(t)\, dt.$$

题 8 (10分). 设 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ 是一个测度空间，$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是一列非负可测函数，

$$f_n : X \to [0, \infty],$$

并且满足

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n \, d\mu < \infty.$$

设 $\{h_N\}_{N=1}^{\infty}$ 是一列非负可测函数，满足

$$h_N(x) \leq \sum_{n=N}^{\infty} f_n(x) \quad \text{for a.e. } x \in X,$$

并且

$$h_N(x) \to h(x) \quad \text{for a.e. } x \in X.$$

证明

$$h = 0 \quad \text{a.e.}$$

题 9 (10分). 设 $1 \leq p < \infty$。在 $[0,1]$ 上构造一列函数 $\{f_n\}$，使得

$$f_n \to 0 \quad \text{a.e.},$$

但

$$\|f_n\|_{L^p([0,1])} \not\to 0.$$

进一步构造例子使得

$$\|f_n\|_{L^p([0,1])} \to \infty.$$

题 10 (10分). 设 (X, Γ, μ) 为测度空间。设 $\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \Gamma$，且

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) < \infty.$$

证明：几乎每个点$x \in X$至多属于有限多个 E_n。