26 秋概率论期中

一、摸球

现在有一批箱子，箱子里有白、黑两种球。第一个箱子里的球数量为 (a,b)，之后所有箱子里的数量均为 (c,d)。从第一个箱子开始，每次取一个球，之后放入下一个箱子，如此循环。记 p_n 为第 n 次摸到的球是白色的概率。求 p_n。

在 $n\to\infty$ 的情况下， p_n 是多少？怎么直观理解这个性质

二、丢骰子

现在有一个均匀的骰子，进行 $n\geq 3$ 次投掷。记事件 A_{ij} 为第 i 次和第 j 次投掷结果相同的事件，考虑事件集 $\{A_{ij}:1\leq i<j\leq n\}$

1. 上述事件集中，所有事件是否独立?
2. 是否两两独立?

三、Cauchy 分布及其变换

已知 X,Y 相互独立，且服从标准 Cauchy 分布：

$$p(x)=\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2},\quad x\in\mathbb{R}$$

证明，下面两个概率变换与 X 同分布：

$$Z=\frac{1+X}{1-X},\quad U=\frac{1}{2}(X+Y)$$

四、条件分布

已知 X,Y 相互独立，且是 $[0,1]$ 上的均匀分布，取 $Z=\max\{X,Y\},S=X+Y$。求在 S 的条件下，Z 的分布。注意，这里 S 应分别讨论 $[0,1],[1,2]$ 两个区间。

五、Poisson 分布的性质

已知 $X_1,X_2,\dots,X_n$ 相互独立，$X_i\sim\mathrm{Poi}(\lambda_i)$。求条件分布：

$$(X_1,X_2,\dots,X_n)\mid\sum_i X_i=m$$

六、指数分布独立性

现有四个随机变量，其联合密度函数为：

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=24e^{-(x_1+x_2+x_3+x_4)},\quad 0<x_1<x_2<x_3<x_4<\infty$$

现做如下变换：

$$U_1 = X_1, \quad U_2 = X_2 - X_1, \quad U_3 = X_3 - X_2, \quad U_4 = X_4 - X_3$$

说明 U_i 相互独立，且服从什么分布。

（附加题）七、指数分布 & 次序统计量

一列 $X_1, X_2, \dots X_n \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ 独立同分布。证明

$$X_{(n)}, \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{X_k}{k}$$

二者同分布

概率论期中考试（回忆版）

2026 年 11 月 6 日

整理说明：本文件根据考场回忆整理，题干措辞与原卷可能略有差异。
P1 的操作按“依次对 $i=1,2,\dots,n-1$ 从 A_i 取一球放入 A_{i+1}”理解；
P2 中 A_{ij} 按“第 i 个与第 j 个骰子点数相同”理解；
P4 按“求条件分布”理解；P6 的支撑域按有序指数样本补全为 $0<x_1<x_2<x_3<x_4$。
全卷满分 100 分；P7 为附加题，另加 10 分，不计入前面的 100 分。

P1（18 分）

盒子 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 中装有白球和黑球：

- A_1 中有 a 个白球、b 个黑球；
- $A_2, A_3, \dots, A_n$ 中各有 c 个白球、d 个黑球。

每次操作从 A_i 中随机取出一球放入 A_{i+1} 中，依次对 $i=1,2,\dots,n-1$ 进行。最后从 A_n 中随机取出一球。

(1) 求取出的球为白球的概率 P_n；

(2) 求 $\lim\limits_{n\to\infty} P_n$，并给出直观解释。

P2（18 分）

设有 n 个均匀骰子，每个骰子的点数为 $1,2,\dots,6$。对 $1\le i<j\le n$，令 A_{ij} 表示“第 i 个骰子与第 j 个骰子点数相同”的事件。

问：事件族

$$\{A_{ij} : 1\le i<j\le n\}$$

是否两两独立？是否相互独立？说明理由。

P3（18 分）

设 X, Y 独立同分布，均服从标准 Cauchy 分布，其密度为

$$p(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

证明：

$$Z = \frac{1+X}{1-X} \quad \text{与} \quad U = \frac{1}{2}(X+Y)$$

都与 X 同分布。

P4（18 分）

设 X, Y 独立同分布，均服从区间 $(0,1)$ 上的均匀分布。分别在条件

$$X+Y \in [0,1] \quad \text{与} \quad X+Y \in [1,2]$$

下，求 $\max\{X,Y\}$ 的条件分布。

P5（12 分）

设 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 独立同分布，均服从参数为 λ 的 Poisson 分布。给定

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = m,$$

求 $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ 在该条件下的条件分布。

P6（16 分）

设随机向量 (X_1, X_2, X_3, X_4) 的联合密度为

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = 24e^{-(x_1+x_2+x_3+x_4)}, \qquad 0 < x_1 < x_2 < x_3 < x_4.$$

令

$$U_1 = X_1, \qquad U_2 = X_2 - X_1, \qquad U_3 = X_3 - X_2, \qquad U_4 = X_4 - X_3.$$

求 (U_1, U_2, U_3, U_4) 的联合分布。

P7（附加题，10 分）

设 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 独立同分布，均服从参数为 λ 的指数分布。求证：

$$\max_{1\le i\le n} X_i \overset{d}{=} \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{i}.$$