中国科学技术大学数学科学学院
2026年春季学期《复分析》期中考试试卷

2026年5月10日，9:30 - 11:30

姓名: ____________ 学号: ________________

说明：

1. 闭卷考试。请将解答写在试卷上，试卷背面也可以写。考试结束后只交试卷。
2. $B(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C}, |z - z_0| < r\}$指的是圆心在$z_0$，半径为$r$的圆盘。
3. 作答时请保持字迹清晰，卷面整洁。

试卷正文 （共六题，总分100分）

1. [10 分] 设 $f(z)$ 是一个整函数，假设存在正实数 A、B 和 a，使得对$|z|$足够大时，有 $|f(z)| \leq A + B|z|^a$. 证明 $f(z)$ 是一个次数不超过 $[a]$ 的多项式。

   解答: 设f在$\mathbb{C}$ 上的幂级数展开为 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. 由Cauchy不等式，对足够大的 $r > 0$，

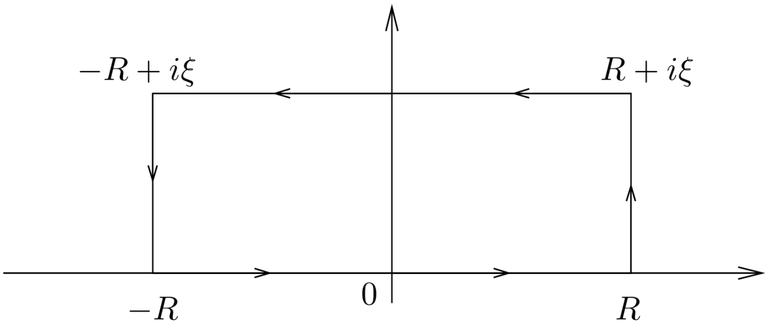
   $$|a_n| = \frac{1}{n!}|f^{(n)}(0)| \leq \frac{\max_{|z|=r} |f(z)|}{r^n} \leq \frac{A + Br^a}{r^n}.$$

   若 $n > a$，让 $r \to \infty$，可得 $a_n = 0$. 故 f 是次数不超过 $[a]$ 的多项式。

2. [15 分] 已知 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2}\,\mathrm{d}x = 1$. 用复分析方法证明$e^{-\pi x^2}$是其自身的傅里叶变换，即对$\forall\, \xi \in \mathbb{R}$，

$$e^{-\pi\xi^2} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} e^{-2\pi i x\xi} dx.$$

（提示:考虑顶点为$-R, R, R+i\xi, -R+i\xi$的矩形围道，对函数$e^{-\pi z^2}$应用Cauchy积分定理）



解答：当 $\xi = 0$ 时，结论即为已知公式。设 $\xi > 0$，考虑整函数 $F(z) = e^{-\pi z^2}$。取顶点为$-R, R, R+i\xi, -R+i\xi$的矩形围道Q_R. 由 Cauchy 积分定理，

$$\int_{\partial Q_R} e^{-\pi z^2}\, dz = 0.$$

让$R \to \infty$, 底边积分趋于 1。右边竖边的积分满足

$$\left| \int_0^{\xi} e^{-\pi(R+iy)^2} i\, dy \right| \le \xi e^{-\pi R^2 + \pi\xi^2} \to 0, \quad \text{as } R \to \infty$$

左边竖边同理趋于 0。顶边积分为

$$\int_R^{-R} e^{-\pi(x+i\xi)^2}\, dx = -e^{\pi\xi^2} \int_{-R}^{R} e^{-\pi x^2} e^{-2\pi i x\xi}\, dx.$$

令 $R \to \infty$，得到

$$0 = 1 - e^{\pi\xi^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} e^{-2\pi i x\xi}\, dx.$$

因此

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} e^{-2\pi i x\xi}\, dx = e^{-\pi\xi^2}.$$

当 $\xi < 0$ 时，取下半平面的矩形，证明相同。

3. [20 分] 设 $f \in H(B(0,1)) \cap C(\overline{B(0,1)})$，且对任意$|z|=1$，有$|f(z)|=1$.

(a) 证明若f在$B(0,1)$中没有零点，则f为常数。

(b) 证明f在$B(0,1)$中的零点个数有限。记所有零点为$a_1, \ldots, a_m$, 按重数计数（即零点总个数为m，一个k阶零点按k个重合的零点计数），并证明存在 $\theta \in \mathbb{R}$，使得

$$f(z) = e^{i\theta} \prod_{j=1}^{m} \frac{a_j - z}{1 - \overline{a_j} z}.$$

解答:

(a) 由最大模原理， $|f(z)| \leq 1, \forall\, z \in B(0,1)$. 又因为 f 在 $B(0,1)$ 中无零点，故 $1/f \in H(B(0,1))$，并且 $1/f \in C(\overline{B(0,1)})$。再次由最大模原理， $|1/f(z)| \leq 1$, $\forall\, z \in B(0,1)$. 于是 $|f(z)| = 1$ 对所有 $z \in B(0,1)$ 成立。因此最大模在内部取到，f 必为常数。

(b) 首先由零点的孤立性以及f在$B(0,1)$边界上非零，知 f 在 $B(0,1)$ 中的零点个数有限。记为$a_1, \ldots, a_m$,，此处我们约定k重零点为k个重合的一阶零点。令

$$\varphi(z) = \prod_{j=1}^{m} \frac{a_j - z}{1 - \overline{a_j} z}.$$

则 φ 在 $B(0,1)$ 中的零点与 f 的零点完全相同，且重数相同，并且 $|\varphi(z)| = 1$ 对 $|z| = 1$成立。于是 $h(z) = f(z)/\varphi(z) \in H(B(0,1)) \cap C(\overline{B(0,1)})$ 且在 $B(0,1)$ 中无零点。在边界$|z| = 1$上，也有$|h(z)| = 1$. 由(a)，h 必为常数。因此存在$\theta \in \mathbb{R}$, $f(z) = e^{i\theta}\varphi(z)$.

4. [20 分] 设 $\varphi:[0,1]\to\mathbb{C}$ 连续。对 $z\in B(0,1)$，定义 $F(z)=\displaystyle\int_0^1\frac{\varphi(t)}{1-tz}\,\mathrm{d}t.$

(a) 证明 F 在 $B(0,1)$ 上连续。

(b) 设 $\gamma\subset B(0,1)$ 是任意可求长闭曲线。证明 $\int_\gamma F(z)\,\mathrm{d}z=0$, 并由此说明$F$在$B(0,1)$全纯。

(c) 证明 F 在 0 处有幂级数展开$F(z)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$, $|z|<1$, 并写出a_n的表达式。

(d) 当 $\varphi(t)\equiv 1$ 时，证明$F(z)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n+1}$, $|z|<1$, 并说明该幂级数的收敛半径为 1.

解答:

(a) 对任意$z_0\in B(0,1)$, 取 $0<r<1$使得$|z_0|<r$. 对任意$|z|\le r$,

$$|F(z)-F(z_0)|\le\int_0^1\varphi(t)\frac{t|z-z_0|}{|1-tz||1-tz_0|}dt\le\frac{\max_{t\in[0,1]}\varphi(t)}{(1-r)^2}|z-z_0|$$

因此 F 在 z_0处连续，由z_0任意性，F在 $B(0,1)$ 上连续。

(b) 设 $\gamma\subset B(0,1)$ 为任一可求长闭曲线。由紧性，可取$r<1$ 使得 $\gamma\subset B(0,r)$. 对 $\forall z\in\gamma$, $t\in[0,1]$,

$$\left|\frac{\varphi(t)}{1-tz}\right|\le\frac{1}{1-r}\max_{t\in[0,1]}\varphi(t)$$

一致有界, 所以可交换积分次序：

$$\int_\gamma F(z)\,\mathrm{d}z=\int_\gamma\int_0^1\frac{\varphi(t)}{1-tz}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}z=\int_0^1\varphi(t)\left(\int_\gamma\frac{1}{1-tz}\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}t.$$

对每个 $t\in[0,1]$，函数 $z\mapsto(1-tz)^{-1}$ 在 $B(0,1)$ 中全纯，由Cauchy积分定理可得 $\displaystyle\int_\gamma\frac{1}{1-tz}\,\mathrm{d}z=0$. 因此 $\int_\gamma F(z)\,\mathrm{d}z=0$. 再由 Morera 定理，$F\in H(B(0,1))$.

(c) 当 $|z|<1$ 时，$\displaystyle\frac{1}{1-tz}=\sum_{n=0}^{\infty}t^nz^n$. 若 $|z|\le r<1$，则 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}|t^nz^n|\le\sum_{n=0}^{\infty}r^n<\infty$, 级数一致收敛，所以可逐项积分：

$$F(z)=\int_0^1\varphi(t)\sum_{n=0}^{\infty}t^nz^n\,\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\underbrace{\left(\int_0^1\varphi(t)t^n\,\mathrm{d}t\right)}_{a_n}z^n.$$

(d) 当 $\varphi\equiv 1$ 时，$a_n=\displaystyle\int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t=\frac{1}{n+1}$. 因此 $F(z)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n+1}$, $|z|<1$. 由于 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}\right)^{1/n}=1$, 故收敛半径为 1。

5. [15 分] 设 $P(z)=z^7-5z^3+z-1$. 求 P 在环域$D_1=\{z\in\mathbb{C},\ \frac{1}{4}<|z|<1\}$和$D_2=\{z\in\mathbb{C},\ 1<|z|<2\}$中的零点个数分别为多少。

解答：在 $|z|=1/4$ 上，取主项 -1。有

$$|z^7-5z^3+z|\le\left(\frac{1}{4}\right)^7+5\left(\frac{1}{4}\right)^3+\frac{1}{4}<1.$$

由 Rouché 定理，P 与常数 -1 在 $|z|<1/4$ 中零点个数相同，为 0。
在 $|z|=1$ 上，取主项 $-5z^3$。有

$$|z^7+z-1|\le 1+1+1=3<5=|-5z^3|.$$

由 Rouché 定理，P 与 $-5z^3$ 在 $|z|<1$ 中零点个数相同，为 3。
在 $|z|=2$ 上，取主项 z^7。有

$$|-5z^3+z-1|\le 5\cdot 2^3+2+1=43<128=|z^7|.$$

由 Rouché 定理，P 与 z^7 在 $|z|<2$ 中零点个数相同，为 7。 P 在三条圆周上均无零点。因此P在D_1中有$3-0=3$个零点，在D_2中有$7-3=4$个零点。

6. [20 分] 对 $|a|<1$，已知 $\varphi_a(z)=\dfrac{a-z}{1-\bar{a}z}$ 是 $B(0,1)$的全纯自同构。

(a) 证明对任意$z\in B(0,1)$，有 $\varphi_a\circ\varphi_a(z)=z$.

(b) 设 $f:B(0,1)\to B(0,1)$ 全纯。应用Schwarz引理证明 Schwarz–Pick 不等式：

$$\left|\frac{f(a)-f(z)}{1-\overline{f(a)}f(z)}\right|\le\left|\frac{a-z}{1-\bar{a}z}\right|,\qquad z,a\in B(0,1).$$

(c) 设 $f:B(0,1)\to B(0,1)$ 全纯，并且 f 有两个不同的不动点。证明 $f(z)\equiv z$.

(d) 设 $f:B(0,1)\to B(0,1)$ 全纯，且 $f(0)=0,f'(0)=0$. 证明对任意$z\in B(0,1)$，均有 $|f(z)|\le|z|^2$. 如果存在 $z_0\in B(0,1)\setminus\{0\}$，使得 $|f(z_0)|=|z_0|^2$, 证明存在实数 θ，使得 $f(z)=e^{i\theta}z^2$.

解答:

(a) 直接计算得

$$\varphi_a\circ\varphi_a(z)=\frac{a-\frac{a-z}{1-\bar{a}z}}{1-\bar{a}\frac{a-z}{1-\bar{a}z}}=z$$

且满足$\varphi_a(0)=a,\varphi_a(a)=0$.

(b) 令 $g(\omega)=\varphi_{f(a)}\circ f\circ\varphi_a(\omega)$. 则 $g:B(0,1)\to B(0,1)$ 全纯，且 $g(0)=\varphi_{f(a)}(f(a))=0$. 由 Schwarz 引理， $|g(w)|\le|w|$, $w\in B(0,1)$. 取 $w=\varphi_a(z)$，利用$\varphi_a\circ\varphi_a(z)=z$, 得

$$|\varphi_{f(a)}(f(z))|\le|\varphi_a(z)|,$$

即为所求不等式。

(c) 设两个不同不动点为 $a,b\in B(0,1)$，$a\ne b$。令 $g=\varphi_a\circ f\circ\varphi_a$. 则 $g:B(0,1)\to B(0,1)$ 全纯，且 $g(0)=0$。令 $c=\varphi_a(b)\ne0$. 因为 $f(b)=b$，所以 $g(c)=c$。由 Schwarz 引理的等号情形，

$$g(\omega)=e^{i\theta}\omega,\quad\forall\omega\in B(0,1).$$

再由 $g(c)=c$ 且 $c\ne0$，得 $e^{i\theta}=1$，故 $g(\omega)=\omega$. 因此 $f(z)\equiv z$.

(d) 仿照Schwarz引理的证明，由$f(0)=0,f'(0)=0$, f在$B(0,1)$内幂级数展开为

$$f(z)=f(0)+f'(0)z+\frac{1}{2}f''(0)z^2+\cdots=z^2g(z),\quad z\in B(0,1)$$

其中$g(z)$在$B(0,1)$上全纯，取$0<r<1$，当$|z|=r$时，

$$|g(z)|=\frac{|f(z)|}{|z|^2}\le\frac{1}{r^2}.$$

由最大模原理，在$B(0,r)$内也有$|g(z)|\le1/r^2$. 让$r\to1$，即得$|g(z)|\le1$, $z\in B(0,1)$. 因此对任意$z\in B(0,1)$，均有 $|f(z)|\le|z|^2$. 若存在 $z_0\ne0$ 使得 $|f(z_0)|=|z_0|^2$，则全纯函数$g(z)$在内部取到最大模，从而存在实数 θ，使得 $g(z)=e^{i\theta}$. 因此$f(z)=z^2g(z)=e^{i\theta}z^2$.