2025-2026 学年第二学期复分析期中考试 (宋百林班)

满分 100 分, 考试时间两个小时

1. (24 分) 计算积分:

   (1) $\int\limits_{|z|=4} \frac{z}{z^5-1}\mathrm{d}z$; (2) $\int\limits_{|z-1|=1} \frac{e^z}{z^3-1}\mathrm{d}z$; (3) $\int\limits_{|z-1|=1} \frac{1}{(z-1)^5(z+1)^6}\mathrm{d}z$.

2. (10 分) 函数 $f(z)=|z|^2$ 在哪些点上复可微? 在哪些点上全纯?

3. (10 分) 设 $f(z)=\sqrt[3]{(1-z)(z+1)^2}$, 确定 f 在 $\mathbb{C}\setminus[-1,1]$ 的单值全纯分值, 使得 f 在 $[-1,1]$ 的上岸取正值。并计算 $f(-\mathrm{i})$.

4. (10 分) 求一单叶全纯映射, 把 $B(0,1)\setminus[-1,0]$(单位圆盘去掉线段 $[-1,0]$) 映为单位圆盘 $B(0,1)$.

5. (10 分)$f(z)$ 在可求长简单闭曲线 γ 及其外部区域 D 解析, 且

   $$\lim_{z\to\infty} f(z)=A\in\mathbb{C},$$

   则

   $$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int\limits_{\gamma}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta=\begin{cases}-f(z)+A, & z\in D\\ A, & z\in\gamma\text{内部}\end{cases}$$

6. (10 分) 设 f 为整函数, 且 $f(\mathbb{C})\subset\mathbb{C}\setminus[-1,1]$, 证明 f 为常值函数.

7. (16 分) 设

   $$\frac{1}{\sqrt{1-2tz+t^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}p_n(z)t^n$$

   证明:

   (a) $(n+1)p_{n+1}(z)-(2n+1)zp_n(z)+np_{n-1}(z)=0$;

   (b) $p_n(z)=p'_{n+1}(z)-2zp'_n(z)+p'_{n-1}(z)$;

   (c) $(2n+1)p_n(z)=p'_{n+1}(z)-p'_{n-1}(z)$.

8. (10 分) 求 $z^6-6z+4=0$ 在 $\{z:1\leqslant|z|\leqslant 2\}$ 的零点个数.