1.

(1) $\mathrm{Res}\left(\frac{1}{(z-1)^4(z-2)^6}, 1\right) = \frac{1}{3!}\lim_{z\to 1}\frac{d^3}{dz^3}\frac{1}{(z-2)^6} = \frac{1}{6}\times\frac{(-8)(-9)(-10)}{(-1)^{11}} = 120$

(2) $\mathrm{Res}\left(\frac{\sin z}{(z-1)^2}, +\infty\right) = -\mathrm{Res}\left(\frac{\sin z}{(z-1)^2}, 1\right) = -\frac{d}{dz}\sin z\Big|_{z=1} = -\cos 1$

2. $f(z) = \frac{z}{(z-1)^2(z-3)} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{(z-1)^2} + \frac{C}{z-3}$

$\Rightarrow A = -C = \frac{3}{4}, \quad B = -\frac{1}{2}$

$\because 1<|z|<3, \quad \therefore \frac{1}{z-1} = \frac{1}{z(1-\frac{1}{z})} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n$

$\left(\frac{1}{z-1}\right)^2 = -\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{z-1}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^{-(n+2)}$

$\frac{1}{z-3} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{3^{n+1}}$

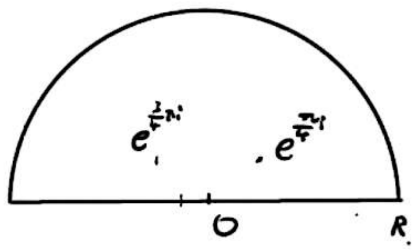
$\Rightarrow f(z) = -\frac{3}{4}\left(\sum_{k=1}^{\infty} z^{-k}\right) - \frac{1}{2}\left(\sum_{k=2}^{\infty}(k-1)z^{-k}\right) + \frac{3}{4}\left(-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^{n+1}}\right)$

3. (1) $\int_{|z|=1} e^{z+\frac{1}{z}}dz = 2\pi i\cdot \mathrm{Res}\left(e^{z+\frac{1}{z}}, 0\right)$

$\because e^{z+\frac{1}{z}} = \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!z^m}\right) \quad \therefore c_{-1} = \mathrm{Res} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!(n+1)!}$

$\Rightarrow \int_{|z|=1} e^{z+\frac{1}{z}}dz = 2\pi i\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!(n+1)!}$

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2-x+1}{x^4+1}dx \overset{\text{奇偶性}}{=\!=\!=} \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2+1}{x^4+1}dx$.



取如右围道

$\because \frac{z^2+1}{z^4+1}\cdot\pi R \to 0 \quad (R\to\infty, |z|=R)$

$\therefore \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2+1}{x^4+1} = \mathrm{Res}(f, e^{\frac{\pi}{4}i}) + \mathrm{Res}(f, e^{-\frac{\pi}{4}i}) = \sqrt{2}\pi$

扫描全能王 创建

4. 注意到 $\pi\cot(\pi z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{z+n}$

求导：$\frac{d}{dz}\pi\cot(\pi z) = -\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)} = -\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z+n)^2}$

$\therefore\ \forall a\in(0,1)$. $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(a+n)^2} = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)}$.

Rmk: 可使用 Mittag-Leffer, 或用 Taylor 展开，说明

扫描全能王 创建

5. 解: $f(z)=\frac{e^{2iz}-1}{z^2}$, $I=\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}dx=-\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\cos 2x-1}{x^2}dx$

如图所示的围道积分 $f(z)$ 之后 $r\to 0$ $R\to\infty$

γ_2 与 γ_4 上: $\int_{-\infty}^{0}f(z)dz+\int_0^{+\infty}f(z)dz \overset{换元}{=\!=} -4I$

γ_1 上: 令 $g(z)=f(z)\cdot z-2i$ $g(z)\to 0$ as $z\to 0$

令 $z=re^{i\theta}$ 有 $\int_{\gamma_1}\frac{g(z)}{z}dz\to 0$ as $r\to 0$

从而 γ_1 上积分贡献 2π

γ_4 上: $\int_0^{\pi}\frac{e^{2iRe^{i\theta}}-1}{R^2e^{2i\theta}}Re^{i\theta}i\,d\theta$

$=\underline{\int_0^{\pi}R^{-1}e^{-i\theta}i\,e^{2iR(\cos\theta+i\sin\theta)}d\theta}$ ①

$\underline{-\int_0^{\pi}R^{-1}e^{-i\theta}i\,d\theta}$ ②

$|②|\le\int_0^{\pi}\frac{1}{R}d\theta\longrightarrow 0$ as $R\to\infty$

$|①|\le\int_0^{\pi}\frac{1}{R}e^{-2R\sin\theta}d\theta\le\int_0^{\pi}\frac{1}{R}d\theta\to 0$ as $R\to\infty$

从而有 $-4I+2\pi=0 \Rightarrow I=\frac{\pi}{2}$

也可以直接分步积分 利用 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$

$\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}dx=\int_0^{+\infty}\sin^2 x\,d(-\frac{1}{x})=-\frac{\sin^2 x}{x}\Big|_{x=0}^{x=+\infty}+\int_0^{+\infty}\frac{\sin 2x}{x}dx\overset{换元}{=}\int_0^{+\infty}\frac{\sin u}{u}du$

扫描全能王 创建

中国科学技术大学
UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY OF CHINA
地址:中国安徽省合肥市 电话:0551-63602184 传真:0551-63631760 网址:http://www.ustc.edu.cn

6. (a) $z_i \in \partial B(0,1)$，$1\le i\le n$. 找一以 $B(0,1)$ 为收敛圆周的幂级数，在只有 z_i，$1\le i\le n$ 为其奇点，圆周上其他点为正则点.

(b) 找一以 $B(0,1)$ 为收敛圆周的幂级数，圆周上没有正则点，但在 $B(0,1)$ 上绝对一致收敛.

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ 的收敛半径为 1，奇点 $z=1$.

取 $f(z)=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1-\frac{z}{z_i}}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{z_i^k}=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}z_i^{-k}\right)z^k$

$\Rightarrow$ $f(z)$ 的收敛半径为 1，奇点 $z_i\ (1\le i\le n)$.

(b) 取 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} z^{n!}$，$f(z)$ 的收敛半径为 1，$z=1$ 是 f 的奇点.

设 $\frac{p}{q}$ 既约分数 $(p>0)$，令 $g(z)=f(e^{i2\pi\frac{p}{q}}z)$，则

$$g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}e^{i2\pi\frac{p}{q}n!}z^{n!}=\sum_{n=0}^{q-1}e^{i2\pi\frac{p}{q}n!}z^{n!}+\sum_{n=q}^{\infty}z^{n!}$$

$\Rightarrow$ $z=1$ 是 g 的奇点

$\Rightarrow$ $z=e^{i2\pi\frac{p}{q}}$ 是 f 的奇点.

若 $\zeta\in\partial B(0,1)$ 不是 f 的奇点，则 $\exists\, B(\zeta,r)$，st. f 能全纯开拓到 $B(\zeta,r)$，

故 $\partial B(0,1)\cap B(\zeta,r)$ 中的每个点都是 f 的正则点.

而 $\partial B(0,1)\cap B(\zeta,r)$ 中必有形如 $e^{2\pi i\frac{p}{q}}$ 的点，矛盾.

$\Rightarrow$ 圆周上没有正则点.

注：此题答案不唯一，言之有理即可.

扫描全能王 创建

7. 用H表示上半平面

(a) 平移不妨设 $a=0$. $B(0,1) \longrightarrow H \xrightarrow{z^3} \mathbb{C}\setminus\{0\}$

(b) $B(0,1) \longrightarrow H \longrightarrow \{z: \operatorname{Im} z > -1\} \xrightarrow{z^2} \mathbb{C}$

(c) D 全纯等价于 $\mathbb{C}$ ✓

不然 D 全纯等价于 $B(0,1)$ 再由(b)即可知

(d) $D=\mathbb{C}$ 时 由 Picard 小定理知 错误

扫描全能王 创建

中国科学技术大学
UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY OF CHINA
地址:中国安徽省合肥市 电话:0551-63602184 传真:0551-63631760 网址:http://www.ustc.edu.cn

8. 设 $D \subseteq \mathbb{C}$ 为域，$G \subseteq \mathbb{C}$ 为单连通域且 $G \neq \mathbb{C}$，

$$\mathcal{F} = \{f \in H(D) \mid f(D) \subseteq G\}.$$

证明：$\mathcal{F}$ 为正规族.

由 Riemann 映射定理，$\exists \varphi: G \to \mathbb{C}$ 双全纯，s.t. $\varphi(G) = B(0,1)$.

$\forall f \in \mathcal{F}$，定义 $g = \varphi \circ f : D \to B(0,1)$，$\mathcal{G} = \{g = \varphi \circ f \mid f \in \mathcal{F}\}$.

$\Rightarrow$ $\mathcal{G}$ 在 D 上内闭一致有界，

由 Montel 定理，$\mathcal{G}$ 是正规族.

$\forall \{f_n\} \subseteq \mathcal{F}$，对应的 $\{g_n\} \subseteq \mathcal{G}$ 有子列 $\{g_{n_k}\}$ 内闭一致收敛到 g.

$\Rightarrow$ $f_{n_k} = \varphi^{-1} \circ g_{n_k}$ 内闭一致收敛到 $\varphi^{-1} \circ g$.

由定义，$\mathcal{F}$ 是正规族.

扫描全能王 创建