2026科大夏令营 回忆版

上午　　（8:30—11:30）

数学分析（80分）

1. （20分）数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 > a_0 > 0$，且
$$a_{n+2} = \frac{2a_{n+1}^2}{a_n + a_{n+1}}. \tag{1}$$
求证：$\{a_n\}$ 收敛，且极限为正。

2. （20分）定义在 $(-\infty, +\infty)$ 的函数 $f(x)$ 有非负的三阶导数，满足方程
$$f'(x) = f(x+1) - f(x) - 1. \tag{2}$$
求所有满足条件的 $f(x)$。

3. （20分）计算积分
$$\iint\limits_{[0,1]\times[0,1]} \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{3}$$

4. （10分）定义在 $[0,1]\times[0,1]$ 的函数 $f(x,y)$ 连续可微，且在边界上恒为 0，求证：
$$\left|\iint\limits_{[0,1]\times[0,1]} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right| \le \frac{1}{6}\max_{[0,1]\times[0,1]}\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}. \tag{4}$$

5. （10分）定义在 $D := \{(x,y):\ x^2+y^2 \le R^2\}$ 的函数 f 二阶连续可微，满足 $f(0,0) = 0$，$\Delta f = x + x^2 + y^2$，计算积分
$$I = \iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{5}$$

线性代数与解析几何（80分）

1. （20分）曲线
$$\begin{cases} xy+yz+zx = 0, \\ x+y+z = 3 \end{cases} \tag{6}$$
在变换 $(x,y,z) \mapsto (x+y, y+2z, z+3x)$ 下变换为椭圆，求该椭圆的中心、法向量与面积。

2. （20分）分块方阵 $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ 满足 $B^\top D$ 为对称矩阵，求证：
$$\det M = \det(A^\top D - C^\top B). \tag{7}$$

3. （20分）记 $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，求方阵

$$M = \begin{pmatrix} B & B & O \\ O & B & B \\ O & O & B \end{pmatrix} \tag{8}$$

的 Jordan 标准形。

4. （20分）设 $V = \mathfrak{sl}_3 := \{A \in M_3(\mathbb{R}):\ \operatorname{tr} A = 0\}$，$V$ 上的线性变换 $\mathcal{P}(X) = P^{-1}XP$，求 $\mathcal{P}$ 的特征多项式，这里

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

下午　　（14:30—17:30）

实分析（40分）

1. （10分）设 $f \in L^1(\mathbb{R})$，g 是 $\mathbb{R}$ 上有界可测函数，定义

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)\mathrm{d}y, \tag{10}$$

求证：$f * g$ 有界且一致连续。

2. （15分）设 f 为 $\mathbb{R}$ 上绝对连续函数。求证：
   - f 把零测集映为零测集；
   - f 把可测集映为可测集。

3. （15分）设 E_1, E_2 为 $\mathbb{R}^2$ 上正测度集。求证：存在 $h \in \mathbb{R}^2$ 使得

$$m(E_1 \cap (E_2 + h)) > 0. \tag{11}$$

复分析（40分）

1. （10分）设 D 为 $\mathbb{C}$ 上边界光滑的区域，f 为 D 上全纯函数，连续延拓到 ∂D。证明：

$$\sup_{z \in \partial D} |f(z) - \bar{z}| \geq \frac{2\,\mathrm{Area}(D)}{\mathrm{Length}(\partial D)}. \tag{12}$$

2. （15分）设 $f(z) = \dfrac{z}{(z-1)^2}$，$\Delta$ 为 $\mathbb{C}$ 上单位圆盘。证明 $f(z)$ 为单射，并求值域。

3. （15分）设整函数 $f(z)$ 满足条件

$$\iint_{\mathbb{C}} \frac{|f(z)|}{(1+|z|)^{2029}} \mathrm{d}A(z) < \infty. \tag{13}$$

这里 $\mathrm{d}A(z)$ 为面积元。证明：$f(z)$ 是次数不超过 2026 的多项式。

近世代数（40分）

1. （10分）分类所有 360 阶有限 Abel 群。
2. （10分）设 u 是方程 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 3$ 的一根。
    - 证明：$[\mathbb{Q}(u):\mathbb{Q}] = 3$；
    - 将 $(1+u)^{-1}$ 表示为 $\{1, u, u^2\}$ 的 $\mathbb{Q}$—线性组合。
3. （10分）设 R 为含幺交换环，P 为其素理想。理想 $I_1, I_2, \cdots, I_n$ 满足

$$\bigcap_{i=1}^{n} I_i = P. \tag{14}$$

   证明：存在 $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$ 使得 $I_i = P$。

4. （10分）设 $C(G)$ 为 G 的中心，即与 G 中任意元素均交换元素构成的子群。证明：若 $G/C(G)$ 为循环群，则 $G = C(G)$。

微分几何（40分）

1. （15分）设 $\mathbf{r}(s)$ 为 $\mathbb{R}^3$ 中以 s 为弧长参数的光滑曲线，$s \in I$，其曲率满足 $0 \le \kappa(s) \le \kappa_0$, 这里 κ_0 是一个常数。设其 Frenet 标架为 $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$。取足够小的 ρ （$0 \le \rho \le 1/\kappa_0$），考虑管形曲面

$$\mathbf{r}(s, v) = \mathbf{r}(s) + \rho(\cos v\, \mathbf{n} + \sin v\, \mathbf{b}), \quad s \in I,\ v \in [0, 2\pi]. \tag{15}$$

    - 若 $\mathbf{r}(s)$ 的长度为 ℓ，求管形曲面的面积；
    - 证明 $\mathbf{r}_s$ 是一个主方向，求其主曲率。进一步，证明 $\mathbf{r}(s, v)$ 是一个 Weingarten 型曲面，即存在不全为零的实数 a, b, c 使得 $aH + bK = c$。
2. （10分）设单位球面 $\mathbb{S}^2$ 的一个标准参数表示为

$$\mathbf{r}(\theta, \varphi) = (\cos\theta\cos\varphi, \cos\theta\sin\varphi, \sin\theta). \tag{16}$$

    - 选取参数 $u = \ln\tan\dfrac{\theta}{2}$， $v = \varphi$，用新参数给出曲面的参数表示 $\mathbf{r}(u, v)$，并证明其与平面 $\mathbb{R}^2$ 局部共形；
    - 称 $\mathbb{S}^2$ 上的曲线 C： $\Gamma(s)$ 为斜航线，若其与经度 φ 固定的参数曲线所成角始终相同。设 C_1, C_2, C_3 是不过南北极点的三条斜航线，两两相交成一个三角形，求该三角形的内角和。
3. （15分）设 $\mathbf{r}(s)$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中的一个简单光滑闭曲线，称其主法向量 $\mathbf{n}(s)$ 在单位球面 $\mathbb{S}^2$ 上绘成的曲线为曲线的主法标线。
    - 求主法标线在单位球面上的测地曲率 $\bar{k}_g$；
    - 用 Gauss-Bonnet 定理证明：该主法标线把单位球面分为面积相同的两半。