2026 年代数学 (I) 期末试卷

整理：煎顺包

2026 年 10 月 29 日

约定：子环总包含单位元；Abel 群等同于 $\mathbb{Z}-$ 模。

一、(15 分) 设 R 为环，M 和 N 为左 $R-$ 模，I 和 J 为 R 的左理想。

(1) 设 $\theta\colon M\to N$ 为模同态，$x\in M$。试证明：$\mathrm{Ann}_R(x)\subset\mathrm{Ann}_R(\theta(x))$。

(2) 设 R 是交换的，试证明：若 R/I 与 R/J 作为 $R-$ 模同构，则 $I=J$。

(3) 若 R 为非交换环，试讨论：(2) 的结论还对吗？若不对，如何修正？

二、(30 分) 设 R 为环，考虑模的短正合列

$$0\longrightarrow X\xrightarrow{f}Y\xrightarrow{g}Z\longrightarrow 0.$$

(1) 设有模同态 $t\colon T\to Y$，满足 $g\circ t=0$。试证明：存在唯一的模同态 $t'\colon T\to X$ 满足 $t=f\circ t'$。给出论证细节。

(2) 设有模同态 $s\colon Y\to C$，满足 $s\circ f=0$。试证明：存在唯一的模同态 $s'\colon Z\to C$ 满足 $s=s'\circ g$。给出论证细节。

(3) 试证明：存在模同态 $r\colon Y\to X$ 满足 $r\circ f=\mathrm{Id}_X$，当且仅当存在模同态 $s\colon Z\to Y$ 满足 $g\circ s=\mathrm{Id}_Z$。此时，$Y\cong X\oplus Z$。

(4) 在上一问条件下，若有 $X=Y=Z$，则模的自同态环 $\mathrm{End}_R(X)$ 不满足 IBN 性质。并证明：此时，对于任何交换环 S，不存在非零环同态 $\mathrm{End}_R(X)\to S$。

附注：原题第 (4) 问缺了短正合列分裂条件（即第 (3) 问条件），此时命题错误，此处改为修正命题。

三、(30 分) 考虑自由 Abel 群 $F=\mathbb{Z}^{\oplus 3}$。设 K 为 F 中由向量 $(2,10,12)$、$(2,6,8)$ 以及 $(0,8,8)$ 生成的子群。

(1) 计算商群 F/K 的秩，以及其扭子群的阶。

(2) 给出群 K 的一组基，并给出必要论证和计算。

(3) 判断并论证：是否存在子群 $U\subset F$，使得有内直和分解 $F=K\oplus U$？

(4) F/K 自然成为左 $R = \mathrm{End}_{\mathbb{Z}}(F/K)-$ 模:

$$f \cdot v := f(v), \quad \forall f \in R,\ v \in F/K.$$

判断并论证: 此 $R-$ 模是否为不可分解模?

四、 (25 分) 复系数 Laurent 多项式是指形如 $\sum_{i\in\mathbb{Z}} a_i x^i$ 的式子, 其中仅有有限多个系数 a_i 非零。约定 $x^0 = 1$ 。它们自然构成 Laurent 多项式代数 $\mathbb{C}[x, x^{-1}]$。

(1) 证明: $\mathbb{C}[x, x^{-1}]$ 为 PID; 并给出其所有极大理想。

(2) 列出全部有限生成的不可分解 $\mathbb{C}[x, x^{-1}]-$ 模, 并给出必要论证。

(3) 考虑 $\mathbb{C}[x, x^{-1}]-$ 模 $N = \dfrac{\mathbb{C}[x, x^{-1}]}{(x - 1 - x^{-1} + x^{-2})}$ 。试将 N 分解为不可分解模的直和。给出必要论证。

(4) 证明: 自然嵌入 $\mathbb{C}[x] \hookrightarrow \mathbb{C}[x, x^{-1}]$ 是交换环范畴 CRing 中的满态射, 但不是同构。