

2025-2026 春季学期近世代数期中考试

一、填空题 (每题 3 分, 共计 15 分)。

- (1) 集合 $\{1, 2\}$ 上有 ____ 个不同的等价关系; 集合 $\{1, 2, 3\}$ 上有 ____ 个不同的等价关系; 集合 $\{1, 2, 3, 4\}$ 上有 ____ 个不同的等价关系。
- (2) 设 $\mathbb{Z}[i]$ 是高斯整环, 商环 $\mathbb{Z}[i]/(1+i)$ 中的元素个数为 ____。
- (3) 在集合 $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17\}$ 中, _____ 是高斯整环 $\mathbb{Z}[i]$ 中的素元。
- (4) 整数 ____ 介于 1000 到 1100 之间且满足下面的同余方程

$$\begin{cases} x \equiv 2 \pmod{3} \\ x \equiv 4 \pmod{5} \\ x \equiv 3 \pmod{7} \end{cases}$$

- (5) 剩余类环 $\mathbb{Z}_{24} := \mathbb{Z}/(24)$ 的自同构群 $\text{Aut}(\mathbb{Z}_{24})$ 中含 ____ 个元素。

二、判断并给出简要理由 (每题 3 分, 共计 15 分)。

- (1) $\{0\}$ 是 $\mathbb{Z}_4 = \{0, 1, 2, 3\}$ 的素理想。
- (2) R 为 Noether 环, 当且仅当 $R[x]$ 为 Noether 环。
- (3) 映射 $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, n \mapsto (n, 0)$ 是一个环同态。
- (4) 整数环 $\mathbb{Z}$ 的极大谱与素谱相同。
- (5) $R = \mathbb{Z}[i]$ 时, $R[x]$ 是唯一分解整环。

三、(6+4=10 分)

- (1) 设 R_1, R_2 是交换环, 考虑环 $R = R_1 \times R_2$ 。证明 R 的每个理想 I 都形如 $I = I_1 \times I_2$, 其中 I_i 是 R_i 的理想。
- (2) 给出环 $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{105} = (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/105\mathbb{Z})$ 的所有素理想。

四、(6+3+3=12 分) 环 R 中的元素 a 称为幂零元, 如果存在 $n \in \mathbb{N}$ 使 $a^n = 0$ 。设 R 是交换环, I 是 R 中幂零元素构成的集合, 证明:

- (1) I 是 R 的一个理想。

(2) 商环 R/I 中无非零的幂零元素。

(3) 给出环 $\mathbb{Z}_{180} = \mathbb{Z}/180\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \bar{179}\}$ 中的所有幂零元。

五、(12 分) 证明：理想 I 是 R 的极大理想 $\iff$ 商环 R/I 是一个域。

六、(8+4=12 分) 令 $R = \mathbb{Z}[i]$ 是高斯整环。

(1) 分别求 $7+i$ 和 $5-3i$ 在高斯整环 $R = \mathbb{Z}[i]$ 中的不可约分解。

(2) 分别求多项式 $f(x) = (7+i)x + (5-3i) \in R[x]$ 和多项式 $g(x) = (7+i)x^2 + (5-3i)x + (1+i) \in R[x]$ 的容量。

七、(8+4=12 分)

(1) 设 I, J 是环 R 的理想且 $I \subseteq J$, 证明： J/I 是商环 R/I 的理想，并且有环同构 $R/J \cong (R/I)/(J/I)$ 。

(2) 取 $R = \mathbb{Z}[x]$, $J = (x-2, x^2+1) \triangleleft R$ 。证明： $\mathbb{Z}[x]/J \cong \mathbb{Z}_5$ 。

八、(3+6+3=12 分)

(1) 证明 $p(x) = x^3 + 2x + 1 \in \mathbb{Z}_5[x]$ 不可约。

(2) 令 $E = \mathbb{Z}_5[y]/\langle p(y) \rangle$ 。证明 $\bar{y} = y + \langle p(y) \rangle \in E$ 为 $p(x)$ 在 E 上的一个根，并且 $\{1, \bar{y}, \bar{y}^2\} \subset E$ 构成 $\mathbb{Z}_5$ -向量空间 E 的一组基。

(3) 求 $(\bar{y} + 1)^{-1} \in E$ 关于 (2) 中基的线性展开。