

2026 近世代数 (1) 期末 (2.5h)

一: 判断并阐述理由 (5分*5)

- ①: R 为整环, 则 $R[x]$ 为整环
- ②: R 为 PID, 则 $R[x]$ 为 PID
- ③: 有限域乘法群为循环群
- ④: 代数扩张均为有限扩张
- ⑤: K/F 为 Galois 扩张, 则 $|\text{Gal}(K/F)| = [K:F]$

二: 填空 (3分*5)

- ①: \mathbb{Z}_{12} 零因子个数.
- ②: $R/(1+i) \cong \underline{\hspace{2cm}}$ (写一个具体的环)
- ③: $[\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) : \mathbb{Q}] = \underline{\hspace{2cm}}$
- ④: $G \leq \text{Gal}(E/F)$ 其对应的中间域为
- ⑤: $x^5 - x - 1$ 在 F_2 上分裂域元素个数

三: 简单 (第六题20分, 其余10分)

1: $f, g \in F[x, y]$ 互素

- ①: $\exists u, v \in F[x, y]$ st. $0 \neq fu + gv \in F[x]$
- ②: $\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$ 解为有限个

2: R 含么环

- ①: $l-ab$ 可逆 $\Leftrightarrow l-ba$ 可逆
- ②: $a, b, l-ab$ 可逆, 则 $a-b^{-1}$, $(a-b^{-1})-a^{-1}$ 可逆
且 $(a-b^{-1})^{-1} - a^{-1})^{-1} = aba - a$

3: 解方程 $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$

$$\begin{cases} f \equiv 1 \pmod{x+1} \\ f \equiv 2 \pmod{x-1} \\ f \equiv x+1 \pmod{x^2+1} \end{cases}$$

4: $f(x) = x^4 - 2$

- ①: 求 f 在 \mathbb{Q} 上的分裂域 K
- ②: 确定 $\text{Gal}(K/\mathbb{Q})$, 找出所有中间域

5: $f(x) = x^5 - 5x + 1$

- ①: 证明在 \mathbb{Q} 上不可约
- ②: 说明 f 有无根式解

6: $\Psi_n(x)$ 为分圆多项式, $\zeta_n = e^{\frac{2\pi i}{n}}$

- ①: 证明 $\Psi_n(x) \in \mathbb{Q}[x]$ 且 $\prod_{d|n} \Psi_d(x) = x^n - 1$
- ②: 证明 Ψ_n 不可约, 即 Ψ_n 为 ζ_n 极小多项式
- ③: 证明 $\text{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_n)/\mathbb{Q}) \cong (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$
- ④: 确定 $\text{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_{10})/\mathbb{Q})$, 并找出其所有中间域