中国科学技术大学

2025-2026 学年高等泛函分析期末考试

考试时间：120 分钟　　满分：110 分

姓名:		学号:		分数:	

注意事项:

1. 答题前请将姓名、学号等个人信息填写清楚；
2. 请尽量在试卷上作答, 答题纸上有用部分请明确标注, 草稿纸不需要上交；
3. 请提供必要的推导过程;
4. 允许使用课上讲过的所有定理但需要准确陈述;
5. 有多个小问的题目可以在下一问中使用上一问的结论, 但请注明尚未证明的结论.

题 1 (20 分)**.** *(1) 叙述 Krein-Milman 定理, 无需证明.*

(2) 证明 $L^1[0,1]$ 不能等距同构于某个赋范线性空间的对偶空间.

Solution.

1. 给定局部凸拓扑向量空间 X 和其上非空凸紧集 K, 令 $\operatorname{ext}(K)$ 为 K 的 extreme points 的集合, 则有
$$K = \overline{\operatorname{conv}}(\operatorname{ext}(K))$$
2. 若 $L^1[0,1]$ 等距同构于某个赋范空间 X 的对偶空间 X^*, 则由 Banach-Alaoglu 定理知 $L^1[0,1] \cong X^*$ 上的单位闭球 B 在 weak* 拓扑下是紧的, 于是由 Krein-Milman 定理它包含 extrme points.

   对任意 $f \in B$, 若 $\|f\|_1 < 1$, 则 $f = (1 - \|f\|_1) \cdot 0 + \|f\|_1 \cdot \frac{f}{\|f\|_1}$ 为 B 中两个不同于 f 的点的凸组合, 故 f 不是 extreme point. 若 $\|f\|_1 = 1$, 则存在 $T \in (0,1)$ 使得 $\int_0^T |f(t)|\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$. 令
$$f_1(t) := 2f(t)1_{[0,T]}(t), \quad f_2(t) := 2f(t)\mathbf{1}_{(T,1]}(t), \quad t \in [0,1].$$
   容易验证 $f_1, f_2 \neq f$, $f_1, f_2 \in B$ 且 $f = \frac{1}{2}f_1 + \frac{1}{2}f_2$, 于是 f 不是 extreme point. 综上 B 不包含任何 extreme point, 这与前面的结论矛盾.

题 2 (15 分)**.** *定义* P.V.$(\frac{1}{x}) : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ *如下:*

$$\left\langle \varphi, \mathrm{P.V.}\left(\frac{1}{x}\right)\right\rangle := \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x.$$

证明 P.V.$\left(\frac{1}{x}\right)$ *为一缓增分布 (tempered distribution).*

Solution.

(1) 对任意 $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, 注意到 $\int_{\varepsilon<|x|<1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = 0$, 我们有

$$\int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \int_{1>|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x + \int_{|x|\geq 1} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \int_{1>|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\,\mathrm{d}x + \int_{|x|\geq 1} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x$$

由中值定理知 $\sup_{|x|\leq 1} |\varphi(x)-\varphi(0)| \leq |x| \sup_{|x|\leq 1} |\varphi'(x)|$, 于是

$$\left|\int_{1>|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\,\mathrm{d}x\right| \leq 2\sup_{|x|\leq 1} |\varphi'(x)|.$$

对第二项我们有

$$\left|\int_{|x|\geq 1} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x\right| \leq \sup_{x\in\mathbb{R}} |x\varphi(x)| \cdot \int_{|x|\geq 1} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = 2\sup_{x\in\mathbb{R}} |x\varphi(x)|.$$

Combine these two we get

$$\left|\left\langle \varphi, \mathrm{P.V.}\left(\frac{1}{x}\right)\right\rangle\right| \leq 2\sup_{x\in\mathbb{R}} |x\varphi(x)| + 2\sup_{|x|\leq 1} |\varphi'(x)|, \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}),$$

so P.V.$\left(\frac{1}{x}\right) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

题 3 (15 分)**.** *给定含单位元的 C^* 代数 $\mathcal{A}$. 若 $\varphi \in \mathcal{A}^*$ 满足 $\varphi(e) = 1 = \|\varphi\|$, 证明 φ 将自伴元映到实数, 即对任意 $x \in \mathcal{A}$, $x = x^*$, 有 $\varphi(x) \in \mathbb{R}$.*
提示: 取自伴元 x, 考虑 $e + \mathrm{i}tx$, $t \in \mathbb{R}$. 注意到 $\|e+\mathrm{i}tx\|^2 = \|(e+\mathrm{i}tx)^*(e+\mathrm{i}tx)\|$.

Solution. 任取自伴元 x, 令 $\varphi(x) = \alpha + \beta\mathrm{i}$, 其中 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. 断言 $\beta = 0$. 对 $t \in \mathbb{R}$ 有

$$|\varphi(e+\mathrm{i}tx)|^2 = |1+\mathrm{i}t(\alpha+\beta\mathrm{i})|^2 = (1-t\beta)^2 + t^2\alpha^2 = t^2(\alpha^2+\beta^2) - 2t\beta + 1 \leq \|e+\mathrm{i}tx\|^2.$$

另一方面我们有

$$\|e+\mathrm{i}tx\|^2 = \|(e+\mathrm{i}tx)^*(e+\mathrm{i}tx)\| = \|e+t^2x^2\| \leq 1 + t^2\|x\|^2.$$

于是 $t^2(\alpha^2+\beta^2) - 2t\beta + 1 \leq 1 + t^2\|x\|^2$ 对任意 $t \in \mathbb{R}$ 成立. 令 $t \to 0+$ 知 $\beta \geq 0$, 令 $t \to 0-$ 知 $\beta \leq 0$, 故 $\beta = 0$.

题 4 (20 分)**.** 给定 $\mathbb{C}$ 上 *Hilbert* 空间 H 及其上稠定线性算子 A, B 满足 $A \subset B$.

(1) 证明 $B^* \subset A^*$.

(2) 证明如果 A 自伴且 B 对称, 则 $B = A$.

Solution.

(1) 任取 $y \in D(B^*)$, 则对任意 $x \in D(B)$, 由定义有 $\langle Bx, y\rangle = \langle x, B^*y\rangle$. 由 $A \subset B$ 知对任意 $x \in D(A)$

$$\langle Ax, y\rangle = \langle Bx, y\rangle = \langle x, B^*y\rangle$$

注意到 $|\langle x, B^*y\rangle| \le C\|x\|$ 对任意 $x \in D(A)$ 成立, 由定义知 $y \in D(A^*)$ 且 $A^*y = B^*y$, 于是 $B^* \subset A^*$.

(2) 由 A 自伴知 $A = A^*$. 由 B 对称且稠定知 $B \subset B^*$. 结合 (1) 我们有

$$B \subset B^* \subset A^* = A \subset B,$$

于是上述包含都是等号, 特别地 $B = A$.

题 5 (20 分)**.** 给定 $\mathbb{C}$ 上 *Hilbert* 空间 H 上的有界线性算子 T.

(1) 具体描述 T 的极分解 $T = U|T|$ 中 U 和 $|T|$ 分别满足的性质 *(*无需证明*);*

(2) 记 $|T|$ 的谱测度为 P. 证明 $\mathrm{Ker}(|T|) = \mathrm{Ran}(P(\{0\}))$, 即

$$|T|x = 0 \iff x = P(\{0\})x.$$

(3) 定义 $\mathbb{R}_+$ 上函数列 $f_n(x) := \frac{1}{x} \wedge n = \min(\frac{1}{x}, n)$. 令 U 和 $|T|$ 为 *(1)* 中算子, 证明

$$Ux = \lim_{n\to\infty} T f_n(|T|)x, \quad \forall x \in H.$$

提示*:* 定义 $g_n(x) := x f_n(x)$, 注意到 $T f_n(|T|) = U|T| f_n(|T|) := U g_n(|T|)$.

Solution.

(1) $|T|$ 为正算子, U 为一部分等距算子. $U|_{\overline{\mathrm{Ran}(|\mathrm{T}|)}}$ 为 $\mathrm{Ran}(|\mathrm{T}|)$ 到 $\overline{\mathrm{Ran}(T)}$ 上的等距, U 限制在 $\overline{\mathrm{Ran}(|T|)}^{\perp} = \mathrm{Ker}(|T|)$ 上为 0.

(2) $|T|$ 为正算子, 故自伴. 由谱定理知

$$\||T|x\|^2 = \langle x, |T|^2 x\rangle = \int_{\sigma(|T|)} \lambda^2 \mathrm{d}P_x(\lambda),$$

这里正测度 P_x 由 $P_x(E) = \langle x, P(E)x\rangle$ 决定. 于是 $|T|x = 0$ 当且仅当 $\int_{\sigma(T)} \lambda^2 \mathrm{d}P_x(\lambda) = 0$. 注意到 $\lambda^2 \geq 0$ 且其等于 0 当且仅当 $\lambda = 0$, 于是 $|T|x = 0$ 当且仅当 $P_x(\sigma(|T|)\backslash\{0\}) = 0$. 于是 $|T|x = 0$ 当且仅当

$$\|x - P(\{0\})x\|^2 = \|P(\sigma(|T|)\backslash\{0\})x\|^2 = P_x(\sigma(|T|)\backslash\{0\}) = 0,$$

即 $x = P(\{0\})x$.

(3) 定义 $g_n(x) = x f_n(x)$, 由有界函数演算知 $T f_n(|T|) = U g_n(|T|)$. 故只需证对任意 $x \in H$, 有 $\lim_{n\to\infty} U g_n(|T|)x = Ux$. 注意到 $\lim_{n\to\infty} g_n(x) = \mathbf{1}_{(0,\infty)}(x)$ 逐点成立, 且 $\sup_n \|g_n\|_{\sup} \leq 1 < \infty$, 由有界函数演算知

$$\lim_{n\to\infty} g_n(|T|)x = \mathbf{1}_{(0,\infty)}(|T|)x = P((0,\infty))x, \quad \forall x \in H$$

这里 P 是 $|T|$ 的谱测度. 注意到 $P([0,\infty)) = I$, 由 U 的连续性我们有

$$\lim_{n\to\infty} U g_n(|T|)x = UP((0,\infty))x = Ux - UP(\{0\})x.$$

但由 (2) 知 $P(\{0\})x \in \mathrm{Ker}(|T|)$ 而 $U|_{\mathrm{Ker}(|T|)} = 0$, 故 $UP(\{0\})x = 0$, 于是 $\lim_{n\to\infty} U g_n(|T|)x = Ux$.

题 6 (20 分)**.** *考虑 Hilbert 空间* $H=\ell^2(\mathbb{Z})=\{x=(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}:x_n\in\mathbb{C},\sum_{n\in\mathbb{Z}}|x_n|^2<\infty\}$*. 定义* $T:H\to H$

$$(Tx)_n:=x_{n-1}+x_{n+1},\quad n\in\mathbb{Z}.$$

(1) 对 $i\in\mathbb{Z}$*, 定义* $e_i:=(\delta_{in})_{n\in\mathbb{Z}}\in H$*. 记* $x^{\mathrm{ev}}:=e_0$*,* $x^{\mathrm{odd}}:=e_1-e_{-1}$*. 定义*

$$H^{\mathrm{ev}}=\overline{\operatorname{span}\{T^kx^{\mathrm{ev}}:k=0,1,2,\ldots\}},\quad H^{\mathrm{odd}}=\overline{\operatorname{span}\{T^kx^{\mathrm{odd}}:k=0,1,2,\ldots\}}.$$

证明 $H=H^{\mathrm{ev}}\oplus H^{\mathrm{odd}}$*.*

(2) 定义 $\Phi:H\to L^2[0,1]$*,* $(\Phi(x))(t):=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}nt}x_n$*,* $t\in[0,1]$*,* $x=(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$*. 证明* Φ *为一等距同构, 计算* $\Phi T\Phi^{-1}$*.*

(3) 证明 $\sigma(T)=[-2,2]$*. 对* $g:[-2,2]\to\mathbb{C}$ *连续, 计算* $\Phi g(T)\Phi^{-1}$*.*

(4) 计算谱测度 $\mu^{\mathrm{ev}}:=\mu_{x^{\mathrm{ev}}}$ *和* $\mu^{\mathrm{odd}}:=\mu_{x^{\mathrm{odd}}}$*, 这里对* $x\in H$*,* μ_x *由如下关系唯一确定:*

$$\langle x,g(T)x\rangle=\int_{\sigma(T)}g(\lambda)\,\mathrm{d}\mu_x(\lambda),$$

对任意 $g:\sigma(T)\to\mathbb{C}$ *连续. 提示: 先计算* $\Phi(x^{\mathrm{ev}})$ *和* $\Phi(x^{\mathrm{odd}})$*, 再利用 (3).*

Solution.

(1) 我们断言

$$H^{\mathrm{ev}}=\overline{\operatorname{span}\{e_k+e_{-k}:k\geq 0\}},\quad H^{\mathrm{odd}}=\overline{\operatorname{span}\{e_k-e_{-k}:k\geq 0\}}$$

只证前者, 后者完全类似. 首先验证 $e_k+e_{-k}\in H^{\mathrm{ev}}$, $\forall k\geq 0$. 对 k 作归纳, 当 $k=0$ 显然成立. 若 $e_i+e_{-i}\in H^{\mathrm{ev}}$ 对任意 $i\leq k$ 成立, 由

$$e_{k+1}+e_{-k-1}=T(e_k+e_{-k})-(e_{k-1}+e_{-k+1})$$

知 $e_{k+1}+e_{-k-1}\in H^{\mathrm{ev}}$. 反过来归纳易验证 $T^jx^{\mathrm{ev}}\in\operatorname{span}\{e_k+e_{-k}:k\geq 0\}$ 对任意 $j\geq 0$ 成立. 最后注意到 $\langle e_k+e_{-k},e_j-e_{-j}\rangle=0$ 对任意 $j,k\geq 0$ 成立, 故 $H^{\mathrm{ev}}\perp H^{\mathrm{odd}}$. 显然 $e_j\in H^{\mathrm{ev}}\oplus H^{\mathrm{odd}}$, $\forall j\in\mathbb{Z}$, 于是 $H=H^{\mathrm{ev}}\oplus H^{\mathrm{odd}}$.

(2) 注意到 $\{\mathrm{e}^{2n\pi\mathrm{i}t}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ 为 $L^2[0,1]$ 的规范正交基, 由 Parseval 等式知

$$\|\Phi(x)\|^2_{L^2[0,1]}=\sum_{n\in\mathbb{Z}}|x_n|^2=\|x\|_{\ell^2(\mathbb{Z})},$$

即 Φ 为一等距, 特别地它是单射. 对任意 $f\in L^2[0,1]$, 令 $x_f=(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, 其中 $x_n:=\int_0^1 f(t)\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}nt}\,\mathrm{d}t$, 易验证 $f=\Phi(x)$, 故 Φ 是满射, 从而是等距同构. 对任意 $f=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}nt}x_n\in L^2[0,1]$, 由定义知

$$\Phi T\Phi^{-1}f(t)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}nt}(x_{n+1}+x_{n-1})=(\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}t}+\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}t})f(t)=2\cos(2\pi t)f(t).$$

(3) 由于 Φ 是等距同构, $\sigma(T)=\sigma(\Phi T\Phi^{-1})$. 但 $\Phi T\Phi^{-1}$ 为乘法算子 $M_{2\cos(2\pi t)}$, 故其谱为其本性值域 $\{2\cos(2\pi t): t\in[0,1]\}=[-2,2]$. 由等距同构性质知

$$\Phi g(T)\Phi^{-1}f(t)=g(2\cos(2\pi t))f(t),\quad t\in[0,1].$$

(4) 由定义知 $f^{\mathrm{ev}}:=\Phi(x^{\mathrm{ev}})=1$, $f^{\mathrm{odd}}:=\Phi(x^{\mathrm{odd}})=2\mathrm{i}\sin(2\pi t)$. 由于 Φ 保持内积, 我们有

$$\begin{aligned}\langle x^{\mathrm{ev}}, g(T)x^{\mathrm{ev}}\rangle_{\ell^2(\mathbb{Z})}&=\langle \Phi x^{\mathrm{ev}}, \Phi g(T)x^{\mathrm{ev}}\rangle_{L^2[0,1]}=\langle f^{\mathrm{ev}}, \Phi g(T)\Phi^{-1}f^{\mathrm{ev}}\rangle_{L^2[0,1]}\\&=\int_0^1 g(2\cos(2\pi t))\,\mathrm{d}t=\int_{-2}^2 g(\lambda)\cdot\frac{1}{\pi\sqrt{4-\lambda^2}}\,\mathrm{d}\lambda.\end{aligned}$$

这里作了变量替换 $\lambda=2\cos(2\pi t)$. 由定义知 $\mathrm{d}\mu^{\mathrm{ev}}(\lambda)=\frac{1}{\pi\sqrt{4-\lambda^2}}\mathbf{1}_{(-2,2)}(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda$. 类似地,

$$\begin{aligned}\langle x^{\mathrm{odd}}, g(T)x^{\mathrm{odd}}\rangle_{\ell^2(\mathbb{Z})}&=\langle f^{\mathrm{odd}}, \Phi g(T)\Phi^{-1}f^{\mathrm{odd}}\rangle_{L^2[0,1]}\\&=\int_0^1 g(2\cos(2\pi t))4\sin^2(2\pi t)\,\mathrm{d}t=\int_{-2}^2 g(\lambda)\cdot\frac{\sqrt{4-\lambda^2}}{\pi}\,\mathrm{d}\lambda.\end{aligned}$$

于是 $\mathrm{d}\mu^{\mathrm{odd}}(\lambda)=\frac{\sqrt{4-\lambda^2}}{\pi}\mathbf{1}_{[-2,2]}(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda$.