USTC2026少创班招生入围考试数学试题

回忆版+个人解答

2026年3月14日　08:30–10:10

- 本试卷共20道填空题，每题5分，满分100分。

1、整数 2026 的素因子之和等于 $\underline{\ 1015\ }$.

解. $2026 = 2 \times 1013$，而1013是素数，所以答案是$2 + 1013 = 1015$. □

2、若复数 z, w 满足 $z + w = zw = 2$，则 $\bar{z}w + z\bar{w} = \underline{\ 0\ }$。

解. 由韦达定理易见z, w是方程$x^2 - 2x + 2 = 0$的两根，因此它们分别为$1 \pm i$，直接计算即可。 □

3、若 $\tan\theta = 3$，则 $\dfrac{\cos\theta}{\sin\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right)} = \underline{\ \dfrac{2}{\sqrt{3} - 3}\ }$ 。

解. 直接计算即可

$$\text{原式} = \frac{\cos\theta}{\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta - \frac{1}{2}\sin\theta} \overset{\text{除以}\cos\theta}{=\!=\!=\!=} \frac{2}{\sqrt{3} - \tan\theta} = \frac{2}{\sqrt{3} - 3}.$$

□

4、若复数集 $A = \{1, x, y\}$ 与 $B = \{x^2, xy, y^2\}$ 相等，则 $x^{2026} + y^{2026} = \underline{\ -1\ }$。

证明. 据题意，一共三种情况：$x^2 = 1$ 或 $y^2 = 1$ 或 $xy = 1$. 直接验证可得前面两种情况无解，对第三种情况有$A = \{1, x, 1/x\}$, $B = \{x^2, 1, 1/x^2\}$. 要使二者相等，则$x^3 = 1$. 解得$\{x, 1/x\} = \{\omega, \omega^2\}$, 其中$\omega$是三次单位根，进而$\omega^3 = 1$. 所以$x^{2026} + y^{2026} = \omega^{2026} + \omega^{4052} \overset{\omega^3=1}{=\!=\!=} \omega^1 + \omega^2 = -1$. □

5、向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 满足 $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 1, (\vec{a} - \vec{b}) \perp \vec{b}$，则 $\vec{a}$ 与 $\vec{a} + \vec{b}$ 的夹角余弦值为 $\underline{\ \dfrac{5\sqrt{7}}{14}\ }$.

解. 据条件$(\vec{a} - \vec{b}) \perp \vec{b}$有$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{b}|^2 = 1$, 所以$\vec{a}, \vec{b}$夹角为60 度，此时可不妨设（直接计算也可以）$\vec{a} = (1, \sqrt{3}), \vec{b} = (1, 0)$，然后直接计算即可。 □

6、设 $a \in \mathbb{R}$，$f(x) = (x - 2a)^2 + 1$。若存在 $\mu \in \mathbb{R}$ 使得 $f([a, a + 2]) = [\mu, \mu + 2]$，则 a 的取值范围是 $\underline{\ a = \sqrt{2}\text{或}2 - \sqrt{2}\ }$.

证明. 只需讨论对称轴$x = 2a$的位置与区间$[a, a + 2]$位置关系，分三种情况。

- 对称轴在区间右边，即$2a \geqslant a+2 \Rightarrow a \geqslant 2$. 此时$f$在$[a, a+2]$递减，故最小值为 $f(a+2)=\mu$，最大值为 $f(a)=\mu+2$，代入函数表达式计算解得$a=3/2$，不符合此时的范围。
- 对称轴在区间左边，即$2a \leqslant a \Rightarrow a \leqslant 0$. 此时$f$在$[a, a+2]$递增，故最小值为 $f(a)=\mu$，最大值为 $f(a+2)=\mu+2$，代入函数表达式计算解得$a=1/2$，不符合此时的范围。
- 对称轴严格在区间内部（即 $a<2a<a+2 \Rightarrow 0<a<2$）. 此时函数 $f(x)$ 在 $x=2a$ 处取得极小值，也是整个区间上的最小值。所以最小值 $\mu=f(2a)=1$，这样值域区间的最大值必须为 $\mu+2=3$. 此时考虑两种情况：
  - 当 $f(a) \geqslant f(a+2)$ 时，最大值为 $f(a)$，此时代入函数表达式可解得$a=\pm\sqrt{2}$，然后舍去负的。
  - 当 $f(a)<f(a+2)$ 时，最大值为 $f(a+2)$，此时代入函数表达式可解得$a=2\pm\sqrt{2}$，然后舍去$2+\sqrt{2}$。

  综上所述，只有$a=\sqrt{2}, 2-\sqrt{2}$符合题意。

□

7、若对于任意实数 x，不等式 $\cos 2x+a\sin x-2a<3$ 恒成立，则实数 a 的取值范围是 $\underline{\ a>8-4\sqrt{5}\ }$.

解. 令$t=\sin x$, 则$\cos 2x=1-2t^2$. 现在相当于已知：$1-2t^2+at-2a<3$，即$a(t-2)<2+2t^2$对全体$t\in[-1,1]$恒成立。因为$t-2<0$，所以得到$a>\dfrac{2t^2+2}{t-2}$对全体$t\in[-1,1]$恒成立。此时只要算出右边的最大值即可。现在化简

$$\frac{2t^2+2}{t-2}=\frac{(2t^2-8t+8)+8(t-2)+10}{t-2}=2(t-2)+\frac{10}{t-2}+8.$$

而$t-2<0$, 所以上式最大值在$2(t-2)=\frac{10}{t-2}$时取到，也就是$t=2-\sqrt{5}$时（另一个t要舍去），此时右边的值为$8-4\sqrt{5}$. 所以答案是$a>8-4\sqrt{5}$. □

8、若方程 $e^x-ax^2=0$ 仅有一个实根，则实数 a 的取值范围 $\underline{\ 0<a<\frac{e^2}{4}\ }$.

解. 显然$x\neq 0$，因此考虑$f(x)=e^x/x^2$这个函数，我们需要找水平直线 $y=a$ 与 $y=f(x)$ 只有一个交点的条件。求导得$f'(x)=x^{-3}e^x(x-2)$. 因此导数为零当且仅当$x=2$，且$x<0$时f单增，$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$，$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=+\infty$；$0<x<2$时$f$单减；$x>2$时$f$单增，且$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

画图即可判断$0<a<\frac{e^2}{4}$. □

9、设 $a_1=1, a_{n+1}=\mu a_n^2+1$。若数列 $\{a_n\}$ 无上界，则实数 μ 的取值范围是 $\underline{\ \mu>1/4\ }$.

解. 只需考察这个数列何时**没有不动点**. 若x是不动点，则$x=\mu x^2+1$有实数解，得到$\mu\leqslant 1/4$. 因此要让数列无界，就必须$\mu>1/4$，此时$\mu x^2+1>x$恒成立，说明$\{a_n\}$严格递增，而$a_1=1$落在不动点之内（此时若$\mu=1/4$则$a_n\to 2$），因此最终答案是$\mu>1/4$. □

10、在单位正方形内部随机取一点，然后以该点为圆心画一个单位圆，以 X 表示落在该圆内的正方形顶点个数，则 $\mathbb{E}X=\underline{\ \pi\ }$.

解. 设单位正方形顶点为 $V_1(0,0), V_2(1,0), V_3(1,1), V_4(0,1)$。圆心坐标为 $P(x,y)$，其中 $x, y \in [0,1]$。顶点 V_i 落在圆心为 P、半径为 1 的圆内的条件是 $|PV_i| < 1$. 设X_i 为第 i 个顶点是否在圆内的指示变量，然后令 $X = X_1 + X_2 + X_3 + X_4$.

先计算单个顶点的概率 $\mathbb{E}(X_i) = \mathbb{P}(V_i$ 在圆内)，对$V_1(0,0)$：条件是 $\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2} \leqslant 1 \implies x^2 + y^2 \leqslant 1$. 在单位正方形内，满足此条件的面积是一个半径为 1 的四分之一圆，因此$\mathbb{P}(V_1$ 在圆内$) = \pi/4$，这对其它顶点同样成立，因此加起来数学期望是$4 \times (\pi/4) = \pi$. □

11、设 $a \in \mathbb{R}$。若命题 A：“以 x 为未知数的方程 $x^2 - 2ax + 1 = 0$ 有两个不同实根”和命题 B：“$|a| + |a-1| \leqslant 2$” 有且仅有一个命题正确，则 a 的取值范围是 $\underline{(-\infty,-1) \cup [-\frac{1}{2}, 1] \cup (\frac{3}{2}, +\infty)}$.

解. 直接计算可得

- A为真命题$\Leftrightarrow |a| > 1$.
- B为真命题$\Leftrightarrow -1/2 \leqslant a \leqslant 3/2$.

□

12、设 $A = \{(x,y) : x, y \in \mathbb{Z}, 1949x + 2026y = 1\}$，则 $\min\{|x| : (x,y) \in A\} = \underline{421}$.

解. 用辗转相除法求解即可$2026 = 1 \times 1949 + 77$, $1949 = 25 \times 77 + 24$, $77 = 3 \times 24 + 5$, $24 = 4 \times 5 + 4$, $5 = 1 \times 4 + 1$. 然后寻找裴蜀定理的特解

$$\begin{aligned}1 &= 5 - 4 = 5 - (24 - 4 \times 5) = 5 \times 5 - 24\\ &= 5 \times (77 - 3 \times 24) - 24 = 5 \times 77 - 16 \times 24\\ &= 5 \times 77 - 16 \times (1949 - 25 \times 77) = 405 \times 77 - 16 \times 1949\\ &= 405 \times (2026 - 1949) - 16 \times 1949 = 405 \times 2026 - 421 \times 1949.\end{aligned}$$

所以$1949 \times (-421) + 2026 \times 405 = 1$，特解为$x_0 = -421, y_0 = 405$. 所以方程的通解为$x = -421 + 2026k\ (k \in \mathbb{Z})$. 因此绝对值最小的$|x|$即为421. □

13、已知数列 $a_n = 1 + 2 + \cdots + n\ (n \geq 1)$，若将 $\{a_n\}$ 中被 3 整除的数依次排列，所得数列记为 $\{b_n\}$，则 $b_1 + b_2 + \cdots + b_{2n} = \underline{\dfrac{3n(n+1)(2n+1)}{2}}$.

解. 首先算得$a_n = \frac{n(n+1)}{2}$，直接看出（或者找规律）知$3|a_n \Leftrightarrow n = 3k-1$或$n = 3k$. 于是

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_{2n-1} + b_{2n} = \sum_{k=1}^{n} a_{3k-1} + a_{3k} = \sum_{k=1}^{n} 9k^2 = \frac{3n(n+1)(2n+1)}{2}.$$

□

14、不等式 $x^2 + \sqrt{1-x} \leqslant 1$ 的解集是 $\underline{[0, \frac{\sqrt{5}-1}{2}] \cup \{1\}}$.

解. 令$t = \sqrt{1-x}$去掉无理项，得到$(1-t^2)^2 + t \leqslant 1$, 整理得 $t(t^3 - 2t + 1) \leqslant 0$, 有如下两种可能性

- $t=0$, 不等式化为$0\leqslant 0$，结论平凡，符合题意，此时$x=1$.
- $0<t\leqslant 1$（这是由t的定义要求的），不等式化为 $t^3-2t+1\leqslant 0$，左边因式分解为$(t-1)(t^2+t-1)\leqslant 0$，又因为$t\in(0,1]$，所以可解得$t\in[\frac{\sqrt{5}-1}{2},1]$，对应$x$的范围为$[0,\frac{\sqrt{5}-1}{2}]$.

综上，不等式解集为$[0,\frac{\sqrt{5}-1}{2}]\cup\{1\}$. □

15、已知 $x^2+2axy+3y^2+2x+6y+4>0$ 对所有 $x,y\in\mathbb{R}$ 成立，则 a 的取值范围是 $\underline{\ 0<a<3/2\ }$.

解. 将不等式看作关于 x 的一元二次不等式：$x^2+2(ay+1)x+(3y^2+6y+4)>0$. 先看关于变量$x$的判别式

$$\Delta_x=[2(ay+1)]^2-4\times 1\times(3y^2+6y+4)<0\Rightarrow(a^2-3)y^2+2(a-3)y-3<0.$$

要使该式成立，则必须$a^2-3<0$且关于变量y的判别式小于0，即

$$\Delta_y=[2(a-3)]^2-4(a^2-3)(-3)<0.$$

计算可得$0<a<3/2$. □

16、若函数 $f(x)\ (x\in\mathbb{R})$ 在 $x=1$ 处的切线经过点 $(2,0)$，则函数 $g(x)=\frac{f(x)}{x-2}$ 在 $x=1$ 的导数等于 $\underline{\ 0\ }$.

解. 切线方程为$y-f(1)=f'(1)(x-1)$, 代入$x=2,y=0$得到 $f'(1)+f(1)=0$. 然后求导得

$$g'(x)=\frac{f'(x)(x-2)-f(x)}{(x-2)^2}\Rightarrow g'(1)=-(f'(1)+f(1))=0.$$

□

17、设 $A=\{n\in\mathbb{Z}\mid 2\leq n\leq 2026,\text{且存在 } z\in\mathbb{C},|z|=1 \text{ 使得 } 1+z^{n-1}+z^n=0\}$，则集合 A 的元素个数等于 $\underline{\ 675\ }$.

解. 化简条件可得$z^{n-1}(z+1)=-1$，两边取模长得到$|z+1|=1$，画图可得z的辐角必须为$2\pi/3+2k\pi$或$4\pi/3+2k\pi$，也就是说$z^{n-1}+z^n=\omega^{n-1}+\omega^n=-1$，此时只需讨论两种情况

- $\omega^{n-1}=\omega,\omega^n=\omega^2$，得到$n\equiv 2(\mathrm{mod}\ 3)$.
- $\omega^{n-1}=\omega^2,\omega^n=\omega$，得到$3|n$，会得到$\omega^n=1$，矛盾。

所以只需要找出$2\leqslant n\leqslant 2026$中模3余2的正整数有多少个，经计算是675个。 □

18、设 m 为正整数，若方程 $3x^3-9x^2+m=0$ 的根都是有理数，则 $m=\underline{\ 12\ }$.

解. 令$y=3x$, 得到**首一的**整系数多项式$y^3-9y^2+9m=0$，据因式定理知（因为m是整数）这个方程的有理根一定是整数根。据韦达定理，该方程三个复根满足

$$y_1+y_2+y_3=9,y_1y_2+y_2y_3+y_3y_1=0,y_1y_2y_3=-9m.$$

计算可得$y_1^2+y_2^2+y_3^2=81$. 而三个完全平方加起来为81只可能是$81+0+0$或$36+36+9$，而m是正整数所以不可能有根为零，因此结合$y_1+y_2+y_3=9$可判定：三根为$6,6,-3$，故$-9m=-108$, 得到$m=12$. □

19、将一个 n 边形的每个顶点随机染成红、蓝、黄三种颜色之一，且要求相邻顶点的颜色不同，则可能的染色方式有 $\underline{2^n+2(-1)^n}$ 种。

解. 设染一个包含 n 个顶点的环 C_n，使用 3 种颜色，满足相邻不同色的方法数为 P_n。接下来构造递推式：考虑一条有 n 个顶点的线段（链），第一个点有 3 种选法，后续每个点为了与前一个不同色，只有 2 种选法。所以线段的染色总数为 $3\times 2^{n-1}$。在这 $3\times 2^{n-1}$ 种染色中，包含两种情况：

- 第一点和第 n 点颜色不同（这正是我们要的闭合环 C_n 的染色数 P_n）
- 第一点和第 n 点颜色相同（此时如果把这两个点“捏”在一起，它就等效于一个长度为 $n-1$ 的环 C_{n-1}，所以方法数是 P_{n-1}）

据此可得$P_n+P_{n-1}=3\times 2^{n-1}$. 滚动角标可得$P_{n+1}+P_n=3\times 2^n=2P_n+2P_{n-1}$，进而得到齐次线性递推数列 $P_{n+1}-P_n-2P_{n-1}=0$，特征根为$2,-1$，因此假设$P_n=A\times 2^n+B\times(-1)^n$. 因为$P_2=P_3=6$，所以$A=B=2$. □

20、给定 5 个正整数，从中任取 4 个数求和，所得的所有和数构成集合 $\{86,92,96,98\}$，则原来的五个整数是 $\underline{18,20,24,24,30 \text{ 或 } 19,21,21,25,31}$.

解. 据题意知，有且仅有两个数相等（否则给定集合有5个数）。设这 5 个数为 x_1,x_2,x_3,x_4,x_5，令它们的总和为 $S=x_1+x_2+x_3+x_4+x_5$，任取 4 个数的和，实际上等价于用总和 S 减去未被选中的那个数。所以 5 个和数分别是 $S-x_1,S-x_2,S-x_3,S-x_4,S-x_5$. 求和可得将 5 个和数相加：

$$(S-x_1)+(S-x_2)+(S-x_3)+(S-x_4)+(S-x_5)=5S-(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)=5S-S=4S$$

这说明这 5 个和数的总和必须是 4 的倍数。这 5 个和数由集合 $\{86,92,96,98\}$ 中的 4 个元素，外加其中 1 个重复元素 Y 组成。它们的总和为：

$$4S=86+92+96+98+Y=372+Y$$

因为 $4S$ 是 4 的倍数，且 $372=4\times 93$ 也是 4 的倍数，所以 Y 必须是 4 的倍数。在 $\{86,92,96,98\}$ 中，只有 92 和 96 是 4 的倍数。所以我们有两种情况。

- $Y=92$. 此时 $4S=372+92=464 \implies S=116$。这 5 个和数分别是 $86,92,92,96,98$，解得五个正整数是 $18,20,24,24,30$。
- $Y=96$. 此时 $4S=372+96=468 \implies S=117$。这 5 个和数分别是 $86,92,96,96,98$，解得五个正整数是 $19,21,21,25,31$。

□