一、

盒子中有 n 个球，球上分别有标号 $1,2,\ldots,n$，有放回地摸 m 个球，求取到数字为（非严格）递减序列概率。

二、

工厂生产一批产品过程中，有 A、B 两种生产状态，在状态 A 下合格率为 $\frac{3}{4}$，在状态 B 下合格率为 $\frac{1}{4}$。已知 $P(A)=\theta$，$P(B)=1-\theta$，其中 $0<\theta<1$。现在有放回取两件检测，H_1 表示第1件合格，H_2 表示第2件合格，求

(1) $P(A \mid H_1)$；

(2) $P(H_2 \mid H_1)$；

(3) $P(A \mid H_2 \cap H_1)$；

(4) 比较 $P(A \mid H_1)$，$P(A \mid H_2 \cap H_1)$，θ 大小；

(5) $P(A \mid \text{恰有1件合格})$。

三、

随机变量 X、Y 服从参数为 λ、μ 的 Poisson 分布，$\lambda,\mu>0$ 且 X 与 Y 独立。求给定 $X+Y=n$ 时，X 的条件分布列，此处 $n\in\mathbb{N}^+$。

四、

掷一枚金色均匀硬币，直到首次出现反面，此时记总次数为 N。再掷 N 枚银色均匀硬币，记 X 为银色硬币中正面朝上个数。求 $P(X=0)$，EX。

五、

A、B 为事件，求证：

$$\big|P(A\cap B)-P(A)P(B)\big| \le \frac{1}{4}.$$

六、

盒子中 n 个相同的红球，每单位时间随机取一球，放入一个黑球。记 T 为盒中球全为黑色所需时间，求 ET，$VarT$。

七、

直线上简单对称随机游走 $S_0=0$，$p=\frac{1}{2}$。令 $u_{2n}=P(S_{2n}=0)$。$\tau_0=\inf\{n\ge 1 \mid S_n=0\}$，$f_{2n}=P(\tau_0=2n)$（约定 $f_0=0$）。令

$$U(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}u_{2n}x^n,\qquad F(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}f_{2n}x^n.$$

(1) 求 u_{2n}，$U(x)$；

(2) 求证：$n \geq 1$ 时 $u_{2n} = \sum_{k=1}^{n} f_{2k} u_{2n-2k}$；

(3) 求 $F(x)$；

(4) 求 f_{2n}，并证明 $\lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{k=1}^{n} \{S_{2k}=0\}\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} f_{2k} = 1$；

(5) 令 g_{2n} 表示走 $2n$ 步所有轨道返回 0 点次数总和，约定 $g_0 = 0$。令 $G(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} g_{2n} x^n$。

求 $G(x)$，g_{2n}，并证明 $\frac{g_{2n}}{2^{2n}} \approx \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sqrt{2n}$。