中国科学技术大学
2026 春季学期期中试卷

课程名称：概率论　日期：2026 年 4 月 23 日　开课院系：数学科学学院

姓名：________________ 学号：_______________ 分数：________________

1. (15 分) 王虹与扎尔在 2025 年证明了困扰数学界一个多世纪的 3 维挂谷猜想：
   $\mathbb{R}^3$ 中的挂谷集 (包含所有方向单位线段的紧致子集) 的豪斯多夫维数都等于 3.
   以此为背景写出一个概率空间（有相关性即可），指出三要素，并写一个随机变量.

2. (20 分) $F(x)$ 和 $G(x)$ 为分布函数，回答：

   (a) 对 $0 \le \lambda \le 1$，证明 $\lambda F(x) + (1-\lambda)G(x)$ 和 $F(x)G(x)$ 都是分布函数.

   (b) 设 X 的分布函数为 $F(x)$，n 为正整数，求 $1-(1-F(x))^n$ 对应的一个随机变量.

3. (25 分) 对整数值随机变量 X, Y 定义其距离为

$$d_{\mathrm{TV}}(X,Y) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\mathbb{P}(X=k) - \mathbb{P}(Y=k)|.$$

   (a) 证明 $d_{\mathrm{TV}}(X,Y) = 2\sup_{A\subseteq\mathbb{Z}}|\mathbb{P}(X\in A) - \mathbb{P}(Y\in A)|$.

   (b) 设 (X_r, Y_r)，$1 \le r \le n$，为独立随机对序列，取值于 $\{0,1\}\times\{0,1,2,\ldots\}$，令 $S = \sum_{r=1}^n X_r, P = \sum_{r=1}^n Y_r$. 若对所有 r, $p_r \in (0,1]$, 联合分布列为

$$\mathbb{P}(X_r = x, Y_r = y) = \begin{cases} 1-p_r, & x=y=0, \\ e^{-p_r} - 1 + p_r, & x=1,\, y=0, \\ \dfrac{(p_r)^y e^{-p_r}}{y!}, & y \ge 1, \end{cases}$$

   证明 P 服从参数为 $\lambda = \sum_{r=1}^n p_r$ 的泊松分布，并且 $d_{\mathrm{TV}}(S,P) \le 2\sum_{r=1}^n p_r^2$.

4. (15 分) 若离散型随机变量列 $S_0, S_1, S_2, \ldots$ 满足以下两个条件：

   (a) 对每个 $n \ge 0$，$\mathbb{E}[|S_n|] < \infty$,

   (b) 对每个 $n \ge 0$,

$$\mathbb{E}[S_{n+1} \mid S_0, S_1, \ldots, S_n] = S_n,$$

   则称 $\{S_n\}_{n\ge 0}$ 是一个鞅. 对直线上的简单对称随机游走 S_n ($S_0 = 0$), 证明 S_n 和 $S_n^2 - n$ 均为鞅.

5. (25 分) S_n 为 $\{1, 2, \ldots, n\}$ 上所有排列构成的对称群.

(a) 递归定义 S_n 上的概率测度 $\mathbb{P}_n$：当 $n = 1$ 时，S_1 仅包含排列 (1)，$\mathbb{P}_1$ 为退化分布. 假设已定义 S_{n-1} 上的均匀测度 $\mathbb{P}_{n-1}$，为生成 S_n 上的随机排列，先从 $\mathbb{P}_{n-1}$ 中抽取排列 $\pi^{(n-1)} = (\pi_1, \ldots, \pi_{n-1})$，再将最大元素 n **独立地、均匀随机地**插入到 $\pi^{(n-1)}$ 的 n 个可能位置（包括最前端和最末端）之一，得到 $\pi^{(n)} \in S_n$. 证明按此方式构造的 $\pi^{(n)}$ 服从 S_n 上的均匀分布.

(b) 设 $(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n)$ 是 $(1, 2, \ldots, n)$ 的一个 (均匀) 随机排列, 一个 **run**（连续上升段）$\pi_r, \pi_{r+1}, \ldots, \pi_{s-1}, \pi_s$ （$r \le s$）是指满足

$$\pi_{r-1} > \pi_r < \pi_{r+1} < \cdots < \pi_{s-1} < \pi_s > \pi_{s+1}$$

的子序列, 约定 $\pi_0 = n + 1$, $\pi_{n+1} = 0$. 例如，$n = 4$ 时, 排列 $(1, 3, 2, 4)$ 的 2 个 runs 为 (1,3) 和 (2,4); 排列 $(1, 4, 3, 2)$ 的 3 个 runs 为 (1,4), (3), (2). 令 R_n 为 runs 的个数, 证明 $M_n := nR_n - \frac{1}{2}n(n+1)$ 是一个鞅 (定义见上题)，并对 $n > 1$ 求出 $\mathbb{E}[R_n]$ 和 $\mathrm{Var}(R_n)$.