中国科学技术大学
2026 春季学期期末试卷

课程名称：概率论　　日期：2026 年 5 月 31 日　　开课院系：数学科学学院

姓名：＿＿＿＿＿＿　　学号：＿＿＿＿＿＿　　分数：＿＿＿＿＿＿

1. (10 分) 设 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 独立同分布，方差有限，记

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j,$$

计算协方差 $\mathrm{Cov}(\overline{X}, X_k - \overline{X})$。

2. (20 分) 回答问题：
   (1) 对正整数 n，$\left(\frac{\sin t}{t}\right)^n$ 是否为特征函数？说明理由。
   (2) 设随机变量 X_n 几乎处处收敛到 X，随机变量 Y_n 几乎处处收敛到 Y，对任意的 n，X_n 与 Y_n 都独立，证明 X 与 Y 独立。

3. (10 分) 设随机变量 X_n 依分布收敛到 X，且存在常数 $M > 0$ 使得 $|X_n| \leqslant M$ 对任意的 n 都成立，证明 $\mathbb{E}|X_n| \to \mathbb{E}|X|$。

4. (20 分) 设整数 $n \geqslant 2$，从单位球面 $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$ 上独立均匀选取两点 X 与 Y，定义两者的内积 $Z_n = X \cdot Y$。请回答以下问题：
   (1) 计算 $\mathbb{E}[Z_n]$，$\mathrm{Var}(Z_n)$。
   (2) 证明 Z_n 的概率密度函数为

$$f_{Z_n}(z) = C(1-z^2)^{\frac{n-3}{2}}, \qquad z \in (-1, 1),$$

   这里 C 为常数（可能依赖 n，但不要求具体计算出来）。
   (3) 证明当 $n \to \infty$ 时，$\sqrt{n} Z_n$ 依分布收敛到 $N(0,1)$。

   （提示：若 n 维向量 G 分量为独立标准正态分布，则 $\frac{G}{\|G\|_2}$ 服从 S^{n-1} 上的均匀分布。）

5. (25 分) 设 $X_1, X_2, \ldots$ 独立同分布，满足 $\mathbb{E}[X_1] = 0$，$\mathrm{Var}(X_1) = 1$，$\mathbb{E}[|X_1|^3] < \infty$。对参数 $\beta \geqslant 0$，定义加权和

$$S_n(\beta) = \sum_{k=1}^{n} \frac{X_k}{k^\beta}, \qquad n \geqslant 1.$$

   随着 β 的变化，$S_n(\beta)$ 的极限行为将发生相变。
   (1) 判断当 $n \to \infty$ 时 $B_n(\beta) := \sqrt{\mathrm{Var}(S_n(\beta))}$ 的极限是否为有限数？
   (2) 亚临界相：$\beta > \frac{1}{2}$。
      (a) 证明对任意趋于无穷的正数列 b_n，有 $\frac{S_n(\beta)}{b_n} \xrightarrow{P} 0$。
      (b) （附加题 5 分）假定 $\mathbb{P}(X_k = 1) = \mathbb{P}(X_k = -1) = 1/2$。对任意的 $\beta > \frac{1}{2}$，证明 $\frac{S_n(\beta)}{B_n(\beta)}$ 不可能依分布收敛到标准正态。
   (3) 超临界相：$0 \leqslant \beta \leqslant \frac{1}{2}$。证明 $Z_n = \frac{S_n(\beta)}{B_n(\beta)}$ 依分布收敛到 $N(0,1)$。

6. （25 分）设 $X_1, X_2, \ldots$ 为一列独立同分布的随机变量，且 $\mathbb{P}(X_i = 1) = \mathbb{P}(X_i = -1) = \frac{1}{2}$。令 $S_0 = 0$ 且 $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ 当 $n \geqslant 1$ 时，证明

(1) 对任意的 $t, x > 0$ 和 $n \geqslant 1$，

$$\mathbb{E}[e^{tS_n}] \leqslant e^{nt^2/2}, \qquad \mathbb{P}(|S_n| \geqslant x) \leqslant 2e^{-x^2/(2n)}.$$

(2)（附加题 5 分）对任意的 $x > 0$ 和 $n \geqslant 1$，

$$\mathbb{P}\left(\max_{1 \leqslant m \leqslant n} S_m \geqslant x\right) \leqslant 2\mathbb{P}(S_n \geqslant x),$$

$$\mathbb{P}\left(\max_{1 \leqslant m \leqslant n} |S_m| \geqslant x\right) \leqslant 4\mathbb{P}(|S_n| \geqslant x).$$

(3)

$$\limsup_{n \to \infty} \frac{S_n}{\sqrt{2n \log \log n}} \leqslant 1 \qquad \text{a.s.}$$

（提示：可以先承认（2）中结论。）