

《实用随机过程》期中考试试题

姓名_____ 学号_____ 得分_____

(2026 年 4 月 21 日上午 9:45-11:45)

- 一、(24 分) 设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 表示一个速率为 λ 的 Poisson 过程, 而 S_n 为其第 n 个事件的发生时刻.
- (1) 对任意 $s, t > 0$, 求 $E[N(t)|N(s) = 1]$.
 - (2) 对任意 $s, t > 0$, 求协方差 $\text{Cov}(N(s), N(t))$.
 - (3) 求 $S_{N(t)}$ 的分布函数 $F_t(x)$, 这里约定 $S_0 = 0$.
 - (4) 求在 $N(t) = n$ 条件下 S_k 的条件密度函数, 其中 $1 \leq k \leq n$.
- 二、(12 分) 设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是一个速率为 λ 的 Poisson 过程. 若记随机变量 $X(t) = \frac{1}{t} \int_0^t N(s) ds$, 分别求其期望 $E[X(t)]$ 与方差 $\text{Var}[X(t)]$.
- 三、(16 分) 设一台机器受到的冲击服从一个速率为 λ 的 Poisson 过程, 而每次冲击对机器造成的伤害为一列独立同分布的随机变量, 且服从参数为 μ 的指数分布.
- (1) 设 $D(t)$ 表示 $t > 0$ 时刻为止该机器受到的累积伤害, 求其期望 $E[D(t)]$ 及方差 $\text{Var}[D(t)]$.
 - (2) 若累积伤害超过给定的阈值 $A > 0$, 则该机器就会立即停止工作. 求该机器能正常工作的平均时间.
- 四、(18 分) 设顾客以速率为 λ 的 Poisson 过程到达仅有一个服务窗口的银行. 假定服务时间的期望为 μ , 且到达的顾客只在服务窗口空闲时才会进入, 否则就离开. 现以 $N(t)$ 表示 t 时刻为止接受服务的顾客数.
- (1) 若初始时刻为空闲状态, 问 $\{N(t), t \geq 0\}$ 为什么过程? 简要说明理由.
 - (2) 求 $\lim_{t \rightarrow \infty} m(t)/t$, 其中 $m(t) = E[N(t)]$.
 - (3) 当 $t \rightarrow \infty$ 时, 求到达的顾客会进入银行的极限概率.
- 五、(20 分) 独立重复掷一枚均匀六面骰子, 设模式 $A = 121$ 和 $B = 112$.
- (1) 分别求模式 A 和 B 首次出现所需平均抛掷次数.
 - (2) 求模式 A 和 B 至少有一个出现所需的平均抛掷次数.
 - (3) 求模式 A 比 B 先出现的概率.
- 六、(10 分) 设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 为一更新过程, 且其时间间隔的分布函数 F 非格点, 且期望 μ 有限.
- (1) 对任意时刻 $t > 0$, 以 $A(t)$ 和 $Y(t)$ 分别表示年龄和剩余寿命. 证明: 对任意 $x, y > 0$,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(A(t) > x, Y(t) > y) = \frac{1}{\mu} \int_{x+y}^{\infty} \bar{F}(s) ds,$$

其中 $\bar{F}(s) = 1 - F(s)$.

- (2) (附加题, 10 分) 若对任意 $t > 0$, $A(t)$ 与 $Y(t)$ 均相互独立, 证明: $\{N(t), t \geq 0\}$ 为一 Poisson 过程.

(完)