中国科学技术大学

2025—2026学年第二学期考试试卷

考试科目 实用随机过程　　　　得分 ________

所在院系 ______ 姓名 ________　　学号 ________

(考试时间: 2026年 7月 1日上午 8:30–10:30)

一、(12 分) 设一列随机变量 $\{X_n, n \geq 0\}$ 满足 $X_0 = 1$, 且对任意 $n \geq 1$, 在给定 X_{n-1} 时, X_n 服从 $\{X_{n-1}, X_{n-1}+1, \ldots, N\}$ 上的均匀分布, 其中 $N \geq 2$ 为一个给定的正整数.

(1) 简要说明该随机变量序列为一离散时间 Markov 链, 并写出一步转移概率矩阵 $\boldsymbol{P}$.

(2) 指出该 Markov 链包含多少个等价类, 请写出常返类所包含的状态.

(3) 记 $T = \min\{n \geq 0 : X_n = N\}$, 求期望 $\mathbf{E}T$.

二、(14分) 设离散时间 Markov 链 $\{X_n, n \geq 0\}$ 满足 $X_0 = 0$, 且一步转移概率为

$$P_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{(i+1)(i+2)}, & \text{若 } 0 \leq j \leq i \\ \frac{i+1}{i+2}, & \text{若 } j = i+1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

(1) 求 X_n 的分布, 这里 n 为任一给定的正整数.

(2) 对任一状态 $i \in \{0, 1, 2, \ldots\}$, 它是否常返? 是否正常返? 证明你的结论.

三、(12分) 已知在某个单一红细胞培养试验中, 它经单位时间后以如下方式分裂成一对新细胞: 以 1/4 的概率产生两个红细胞, 以 2/3 的概率产生一个红细胞和一个白细胞, 以 1/12 的概率产生两个白细胞. 设每个新产生的红细胞经单位时间后又以上述同样方式分裂, 而每个白细胞经单位时间后死亡. 试求该培养试验最终无法继续的概率.

四、(24分) 设某金工车间有 $M \geq 2$ 台工业机器人, 且它们独立地间歇性工作, 即每工作参数为 μ 的指数时间后休息参数为 λ 的指数时间. 记 $X(t)$ 表示时刻 t 正在工作的工业机器人台数, 则 $\{X(t), t \geq 0\}$ 为一个连续时间 Markov 链.

(1) 该 Markov 链是否为一个生灭过程? 简单说明理由.

(2) 写出该 Markov 链的 Q 矩阵及其对应嵌入链的一步转移概率矩阵 $\boldsymbol{P}$.

(3) 当 $t \to \infty$ 时, 证明 $X(t)$ 的极限分布为二项分布, 并指出其参数.

(4) 该 Markov 链是否时间可逆? 证明你的结论.

五、(18分) 设 $\{X_n, n \geq 0\}$ 为一离散时间 Markov 链, 且其一步转移概率为

$$P_{ij} = \frac{1}{\mathrm{e}\,(j-i)!}, \quad i = 0, 1, \ldots;\ j = i, i+1, \ldots.$$

判断下列三个过程是否为鞅, 并证明你的结论.

(1) $U_n = X_n - n$,　(2) $V_n = U_n^2 - n$,　(3) $W_n = \exp\{X_n - n(\mathrm{e}-1)\}$.

装 订 线

六、 (20分) 设 $\{X(t), t \geq 0\}$ 为标准 Brown 运动, 且记

$$M(t) = \max_{0 \leq s \leq t} X(s), \quad Y(t) = M(t) - X(t).$$

(1) 对任意实数 $m \geq 0, x \leq m$, 证明: $\mathbf{P}(M(t) \geq m, X(t) \leq x) = \mathbf{P}(X(t) \geq 2m - x)$.

(2) 对任意 $t > 0$, 利用上小问结论求 $M(t)$ 和 $X(t)$ 的联合密度函数.

(3) 证明: $Y(t)$ 与 $|X(t)|$ 同分布.

(4) 在 $Y(t) = 0$ 的条件下, 求 $M(t)$ 的条件密度函数.

七、 (附加题, 10分) 设状态空间为非负整值的离散时间 Markov 链 $\{X_n, n \geq 0\}$ 不可约, 且对任意状态 $j \geq 0$, 有 $\sum_{i=0}^{\infty} P_{ij} = 1$. 证明:

(1) 对任意状态 $j \geq 0$ 和正整数 n, 有 $\sum_{i=0}^{\infty} P_{ij}^n = 1$, 这里 P_{ij}^n 表示 n 步转移概率.

(2) 若该 Markov 非周期, 则它不可能含有正常返状态.

(完)

参考答案

一、(1) 理由略. $\boldsymbol{P} = (P_{ij})_{N\times N}$, 其中 $P_{ij} = \frac{1}{N-i+1}\mathbf{1}_{\{i\le j\}}$, $1 \le i, j \le N$.

(2) 共有 N 个等价类, 常返类仅为 $\{N\}$.

(3) $\mathbf{E}T = 1 + \sum_{k=1}^{N-1}\frac{1}{k}$.

二、(1) 利用数学归纳法, 可证明 X_n 服从 $\{0,1,\ldots,n\}$ 上的均匀分布.

(2) 常返、零常返. 易知该 Markov 链是不可约的, 故我们只需考虑状态 0. 而由上小问可知 n 步转移概率

$$P_{00}^n = \frac{1}{n+1}, \quad n = 0, 1, \ldots.$$

故由课本命题 4.2.3 可知状态 0 为常返的. 再由定理 4.3.1 (或定理 4.3.3) 可知状态 0 为零常返的.

三、由题意, 我们仅可考虑红细胞的数量, 此时可对应一个分支过程, 且其后代分布为

$$\mathbf{P}(Z=0) = \frac{1}{12}, \quad \mathbf{P}(Z=1) = \frac{2}{3}, \quad \mathbf{P}(Z=2) = \frac{1}{4}.$$

该分布的概率生成函数为

$$\phi(s) = \frac{1}{12} + \frac{2}{3}s + \frac{1}{4}s^2.$$

由课本定理 4.5.1 可知所求概率为方程 $\phi(s) = s$ 的最小正根. 解之可得培养试验最终无法继续的概率为 1/3.

四、(1) 是生灭过程. 因为仅相邻状态间有转移.

(2) (本小题可只给出矩阵非零元素的表示式.)

该生灭过程的生长率和死亡率分别为

$$\begin{cases} \lambda_i = q_{i,i+1} = (M-i)\lambda, & i = 0, 1, \ldots, M-1; \quad 1分 \\ \mu_i = q_{i,i-1} = i\mu, & i = 1, \ldots, M. \quad 1分 \end{cases}$$

故 $q_{ii} = -(q_{i,i+1} + q_{i,i-1}) = -(M-i)\lambda - i\mu$, 即 Q 矩阵为 $(M+1)$ 阶方阵, 且

1分

1分
$$Q = \begin{pmatrix} -M\lambda & M\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ \mu & -(M-1)\lambda-\mu & (M-1)\lambda & \cdots & 0 \\ 0 & 2\mu & -(M-2)\lambda-2\mu & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -M\mu \end{pmatrix},$$

对嵌入链的转移概率矩阵 $\boldsymbol{P}$, 我们有 $P_{0,1} = 1, P_{M,M-1} = 1$ 及

1分
$$p_{i,i+1} = \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \mu_i} = \frac{(M-i)\lambda}{(M-i)\lambda + i\mu} = 1 - p_{i,i-1}.$$

从而,

1 5

$$
\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
\dfrac{\mu}{(M-1)\lambda+\mu} & 0 & \dfrac{(M-1)\lambda}{(M-1)\lambda+\mu} & \cdots & 0 \\
0 & \dfrac{2\mu}{(M-2)\lambda+2\mu} & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 1 & 0
\end{pmatrix}.
$$

(3) 易知 $X(t)$ 的极限分布的取值范围仍然为 $\{0,1,\ldots,M\}$, 设对应的概率为 $P = (p_0, p_1, \ldots, p_M)$, 其中 $p_i \geq 0$ 且 $\sum_{i=0}^{M} p_i = 1$. 由方程

$$PQ = \mathbf{0}$$

2s

可知 $\lambda_i p_i = \mu_{i+1} p_{i+1}$, $i = 0, 1, \cdots, M-1$. 解方程组可得,

2

$$p_i = \binom{M}{i}\Big(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\Big)^i \Big(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\Big)^{M-i}, \quad i = 0, 1, \ldots, M,$$

2

即 $X(t)$ 的极限分布为参数分别是 M 和 $\lambda/(\lambda+\mu)$ 的二项分布. 1 1

对任意 $i, j = 0, 1, \ldots, M$, 利用上面的结论易验证

$$p_i q_{ij} = p_j q_{ji}$$

或直接用 生灭过程性质判定

成立, 故该 Markov 链具有时间可逆性.

$p_n = \dfrac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{n-1}}{u_1u_2\cdots u_n} P_0$

$= \dfrac{M(M-1)\cdots(M-n+1)\lambda^n}{n!\,u^n} P_0$

$= \binom{M}{n}\cdot\left(\dfrac{\lambda}{u}\right)^n P_0$ 1 5

五、 均为鞅. 直接验证鞅的定义即可.

2×5

六、 (1) 令 $T_m = \inf\{s \geq 0, X(s) = m\}, m \geq 0$. 由事件 $\{M(t) \geq m\}$ 与 $\{T_m \leq t\}$ 等价, 故对任意实数 $m \geq 0, x \leq m$,

$$
\begin{aligned}
\mathbf{P}(M(t) \geq m, X(t) \leq x) &= \mathbf{P}(T_m \leq t, X(t) \leq x) \\
&= \mathbf{P}(X(t) \leq x | T_m \leq t)\mathbf{P}(T_m \leq t) \\
&= \mathbf{P}(X(t-T_m) \geq m - x | T_m \leq t)\mathbf{P}(T_m \leq t) \\
&= \mathbf{P}(X(t-T_m) \geq m - x, T_m \leq t) \\
&= \mathbf{P}(X(t) \geq 2m - x, T_m \leq t) \\
&= \mathbf{P}(X(t) \geq 2m - x).
\end{aligned}
$$

$\dfrac{u^M}{(\lambda+u)^M}$

(2) 设 Φ 和 ϕ 分别表示标准正态分布的分布函数和密度函数, 则由上可知,

$$\mathbf{P}(M(t) \geq m, X(t) \leq x) = 1 - \Phi\Big(\frac{2m-x}{\sqrt{t}}\Big).$$

$\sum_{i=0}^{M}\binom{M}{i}\left(\dfrac{\lambda}{u}\right)^i P_0$

$= P_0\left(1+\dfrac{\lambda}{u}\right)^M = 1$

$P_0 = \dfrac{u^M}{(u+\lambda)^M}$

1 5

从而, $M(t)$ 和 $Y(t)$ 的联合密度函数为

$$\begin{aligned} f_{M(t),X(t)}(m,x) &= \frac{\partial^2}{\partial m\partial x}\Phi\Big(\frac{2m-x}{\sqrt{t}}\Big) \\ &= \frac{2}{\sqrt{t}}\frac{\partial}{\partial x}\phi\Big(\frac{2m-x}{\sqrt{t}}\Big) \\ &= -\frac{2}{t}\phi'(u)|_{u=(2m-x)/\sqrt{t}} \\ &= \frac{2(2m-x)}{\sqrt{2\pi t^3}}\mathrm{e}^{-\frac{(2m-x)^2}{2t}}, \quad m \geq 0, x \leq m. \end{aligned}$$

2

(3) 由于 $Y(t) = M(t) - X(t)$, 由上小问可知 $(M(t), Y(t))$ 的联合密度函数为 (注意此时 Jacobi 行列式的绝对值为 1)

$$f_{M(t),Y(t)}(m,y) = \frac{2(m+y)}{\sqrt{2\pi t^3}}\mathrm{e}^{-\frac{(m+y)^2}{2t}}, \quad m > 0, y > 0.$$ 2

由此可求出 $Y(t)$ 的边缘密度为

$$f_{Y(t)}(y) = \frac{2}{\sqrt{2\pi t}}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2t}}, \quad y > 0.$$ 2

从而, $Y(t)$ 与 $|X(t)|$ 同分布.

(4) 由上小问可知, 所求条件密度为

$$f_{M(t)|Y(t)=0}(m) = \frac{f_{M(t),Y(t)}(m,0)}{f_{Y(t)}(0)} = \frac{m}{t}\mathrm{e}^{-\frac{m^2}{2t}}, \quad m > 0.$$

七、 (1) 数学归纳法. (2) 反证法. 由于是不可约链, 我们可假设所有状态均正常返. 而由上小问可知, 对任一给定的状态 $j \geq 0$,

$$1 = \sum_{i=0}^{\infty} P_{ij}^n \geq \sum_{i=0}^{N-1} P_{ij}^n \xrightarrow{n\to\infty} \frac{N}{\mu_{jj}}$$

对任意正整数 N 成立, 其中 $\mu_{jj} > 0$ 为状态 j 的平均常返时. 而上式不可能成立.