一、填空题（6' * 6）

1. 计算实系数行列式 $\det\begin{bmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\\3&4&1&2\\4&1&2&3\end{bmatrix}=\boxed{160}$ 和 $\det\begin{bmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\\3&4&1&2\\10&1&2&3\end{bmatrix}=\boxed{424}$。

2. 考虑实系数线性方程组 $\begin{cases}x_1+2x_2-3x_3-4x_4=-5\\3x_1-x_2+5x_3+6x_4=-1\\-5x_1-3x_2+x_3+2x_4=11\end{cases}$，写出该方程的通解

$\boxed{x=\begin{bmatrix}-1\\-2\\0\\0\end{bmatrix}+s\begin{bmatrix}-1\\2\\1\\0\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}-8\\18\\0\\7\end{bmatrix}\quad(s,t\in\mathbb{R})}$。

3. 设实矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&1&2\\0&1&1\\1&2&2\end{bmatrix}$，则 A 的伴随矩阵 $A^*=\boxed{\begin{bmatrix}0&2&-1\\1&0&-1\\-1&-1&1\end{bmatrix}}$，$A^{-1}=$

$\boxed{\begin{bmatrix}0&-2&1\\-1&0&1\\1&1&-1\end{bmatrix}}$。

4. 设实矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&1&2\\0&1&1\\1&2&2\end{bmatrix}$，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是 A 的列向量，β_1,β_2,β_3 是 $A^\top$ 的列向量，已知它们构成 $\mathbb{R}^3$ 的两组基，设列向量 $\alpha\in\mathbb{R}^3$ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的坐标为 $(1,1,0)$，则 α 在基 β_1,β_2,β_3 下的坐标为 $\boxed{(2,-1,0)}$。

5. 设实系数矩阵 $A=\begin{bmatrix}0&1&2&3&4\\1&1&0&0&0\\1&0&2&0&0\\1&0&0&3&0\\1&0&0&0&4\end{bmatrix}$，则 $A^{-1}=\boxed{\begin{bmatrix}-\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\\\frac{1}{4}&\frac{3}{4}&-\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}\\\frac{1}{8}&-\frac{1}{8}&\frac{3}{8}&-\frac{1}{8}&-\frac{1}{8}\\\frac{1}{12}&-\frac{1}{12}&-\frac{1}{12}&\frac{1}{4}&-\frac{1}{12}\\\frac{1}{16}&-\frac{1}{16}&-\frac{1}{16}&-\frac{1}{16}&\frac{3}{16}\end{bmatrix}}$。

6. 设 4 阶方阵 A 满足 $(I-A)^3=0$，则 $\operatorname{rank}(I-A)$ 的最大值是 $\boxed{2}$，使用 A 的多项式表示 $(2I-A)^{-1}=\boxed{I-A+A^2}$。

二、（8' * 2）

1. 设实系数矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&2&-3&-4&-5\\3&-1&5&6&-1\\-5&-3&1&2&11\\-9&-4&-1&1&1\end{bmatrix}$。

（1） 记 $\alpha_j,j=1,2,3,4,5$ 是 A 的列向量，写出该向量组的一个极大线性无关组。

（2） 记 $\beta_i,i=1,2,3,4$ 是 A 的行向量，写出该向量组的一个极大线性无关组，并说明判断理由。

解： 对矩阵 A 作初等行变换 $r_2 \leftarrow r_2 - 3r_1$，$r_3 \leftarrow r_3 + 5r_1$，$r_4 \leftarrow r_4 + 9r_1$，再作 $r_3 \leftarrow r_3 + r_2$，$r_4 \leftarrow r_4 + 2r_2$，得阶梯形矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & -4 & -5 \\ 0 & -7 & 14 & 18 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$。因此 $\operatorname{rank}(A) = 3$，主元列为第 $1, 2, 4$ 列。

（1） 由主元列对应原矩阵的第 $1, 2, 4$ 列，可取列向量组的一个极大线性无关组为 $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4\}$。

（2） 由消元可知行向量组的秩也为 3。又由原矩阵直接可见 $\beta_3 = -2\beta_1 - \beta_2$，故 β_3 可由前两行线性表示；而阶梯形矩阵有三个非零行，说明原行向量组中可以取出三个线性无关的行向量，因此可取一个极大线性无关组为 $\{\beta_1, \beta_2, \beta_4\}$。

2. 求行列式并完全分解因式 $\det \begin{bmatrix} 1 & a^2 & a^3 & a^4 \\ 1 & b^2 & b^3 & b^4 \\ 1 & c^2 & c^3 & c^4 \\ 1 & d^2 & d^3 & d^4 \end{bmatrix}$。

解： 记原行列式为 D。添加一行一列，构造 $F(x) = \det \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 & x^4 \\ 1 & a & a^2 & a^3 & a^4 \\ 1 & b & b^2 & b^3 & b^4 \\ 1 & c & c^2 & c^3 & c^4 \\ 1 & d & d^2 & d^3 & d^4 \end{bmatrix}$。按第一行展开，有 $F(x) = M_1 - xD + x^2 M_3 - x^3 M_4 + x^4 M_5$，所以 $-D$ 正是多项式 $F(x)$ 的一次项系数。

另一方面，$F(x)$ 是 Vandermonde 行列式，因此 $F(x) = (a-x)(b-x)(c-x)(d-x)(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)$。

由 Vieta 定理，$(a-x)(b-x)(c-x)(d-x) = x^4 - (a+b+c+d)x^3 + (ab+ac+ad+bc+bd+cd)x^2 - (abc+abd+acd+bcd)x + abcd$。

比较 x 的一次项系数，得 $-D = -(abc+abd+acd+bcd)(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)$，从而

$D = (abc+abd+acd+bcd)(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)$。

三、（4' + 9'）

1. 设 A, B, C 是同阶方阵，判断 $\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}$ 与 $\begin{bmatrix} O & O \\ C & O \end{bmatrix}$ 是否乘法可交换，若是，证明之；若否，给出反例。

解： 设 $M = \begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}$，$N = \begin{bmatrix} O & O \\ C & O \end{bmatrix}$，则 $MN = \begin{bmatrix} O & O \\ BC & O \end{bmatrix}$，$NM = \begin{bmatrix} O & O \\ CA & O \end{bmatrix}$。因此 M, N 乘法可交换当且仅当 $BC = CA$。

所以它们一般不乘法可交换。取反例 $A = [1]$，$B = [0]$，$C = [1]$，则 $MN = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$，而 $NM = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$，二者不相等，故原命题不成立。

2. 设实系数矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，求 A^n 与 A^{-1}。

解： 记 $N = A - I = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，则直接计算得 $N^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，$N^3 = O$。因此 $A = I + N$，且

$$A^n = (I+N)^n = I + nN + \binom{n}{2}N^2 = \begin{bmatrix} 1 & n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2n & 2n(n-1) & 1 & 2n \\ 0 & n & 0 & 1 \end{bmatrix}。$$

又因为 $N^3 = O$，故 $(I+N)^{-1} = I - N + N^2$，从而 $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$。

四、（3' + 8' + 4'）

1. 设 $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$，证明：$V = \{X \in \mathbb{F}^{n\times p} \mid AX = O\}$ 是 $\mathbb{F}^{n\times p}$ 的一个线性子空间。

证明： 零矩阵 $O \in \mathbb{F}^{n\times p}$ 满足 $AO = O$，所以 $O \in V$。任取 $X_1, X_2 \in V$，$k_1, k_2 \in \mathbb{F}$，则 $AX_1 = O, AX_2 = O$，从而 $A(k_1X_1 + k_2X_2) = k_1AX_1 + k_2AX_2 = O$，故 $k_1X_1 + k_2X_2 \in V$。因此 V 含零元，且对加法与数乘封闭，所以 V 是 $\mathbb{F}^{n\times p}$ 的一个线性子空间。

2. 设实系数矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$，设 $V = \{X \in \mathbb{R}^{4\times 2} \mid AX = O\}$，求 V 的一组基，并给出矩阵方程 $AX = B$ 的所有解。

解： 先求 $Ax = 0$ 的通解。由方程组 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$，由第二式得 $x_2 = -x_3$，代入第一式得 $x_1 = x_3 - 2x_4$。令 $x_3 = s, x_4 = t$，则 $x = s\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$。

记 $u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, u_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$。若 $X = [x^{(1)}, x^{(2)}] \in V$，则 $AX = O$ 等价于 $Ax^{(1)} = 0, Ax^{(2)} = 0$，故 $x^{(1)}, x^{(2)} \in \mathrm{span}\{u_1, u_2\}$。于是 V 的一组基可取为 $E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_2 = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_4 = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$。

再求 $AX=B$ 的所有解。把 B 的两列分别记为 $b_1=\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}, b_2=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$，分别求解 $Ax=b_1, Ax=b_2$。

对 $Ax=b_1$，由方程组 $\begin{cases}x_1+2x_2+x_3+2x_4=1\\x_2+x_3=1\\x_1+3x_2+2x_3+2x_4=2\end{cases}$，令 $x_3=s, x_4=t$，则 $x_2=1-s$，$x_1=-1+s-2t$，所以

$$x^{(1)}=\begin{bmatrix}-1\\1\\0\\0\end{bmatrix}+s\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\0\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}-2\\0\\0\\1\end{bmatrix}。$$

对 $Ax=b_2$，由方程组 $\begin{cases}x_1+2x_2+x_3+2x_4=1\\x_2+x_3=2\\x_1+3x_2+2x_3+2x_4=3\end{cases}$，令 $x_3=p, x_4=q$，则 $x_2=2-p$，$x_1=-3+p-2q$，所以

$$x^{(2)}=\begin{bmatrix}-3\\2\\0\\0\end{bmatrix}+p\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\0\end{bmatrix}+q\begin{bmatrix}-2\\0\\0\\1\end{bmatrix}。$$

因而矩阵方程 $AX=B$ 的所有解为

$$X=[x^{(1)},x^{(2)}]=\begin{bmatrix}-1&-3\\1&2\\0&0\\0&0\end{bmatrix}+sE_1+tE_2+pE_3+qE_4 \qquad (s,t,p,q\in\mathbb{R}),$$

即

$$X=\begin{bmatrix}-1+s-2t&-3+p-2q\\1-s&2-p\\s&p\\t&q\end{bmatrix} \qquad (s,t,p,q\in\mathbb{R})。$$

3. 设 A 是一个 n 阶矩阵，证明存在非零多项式 $f(x)\in\mathbb{F}[x]$ 使得 $f(A)=O$。
证明： 全体 n 阶矩阵组成线性空间 $\mathbb{F}^{n\times n}$，其维数为 n^2。考虑其中的 n^2+1 个矩阵 $I,A,A^2,\dots,A^{n^2}$。由于矩阵个数多于空间维数，这 n^2+1 个矩阵必线性相关，因此存在不全为零的 $c_0,c_1,\dots,c_{n^2}\in\mathbb{F}$，使得 $c_0I+c_1A+c_2A^2+\cdots+c_{n^2}A^{n^2}=O$。
令 $f(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots+c_{n^2}x^{n^2}$，则 $f(x)$ 是非零多项式，且 $f(A)=O$。证毕。

五、（12'）

证明：分块矩阵 $\operatorname{rank}\begin{bmatrix}A&O\\C&B\end{bmatrix}\geq\operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(B)$，等号成立当且仅当存在矩阵 D,E 使得 $C=DA+BE$。

解： 设 $\operatorname{rank}(A)=r$，$\operatorname{rank}(B)=s$。取可逆矩阵 P_A,Q_A,P_B,Q_B，使得 $P_AAQ_A=\begin{bmatrix}I_r & O\\ O & O\end{bmatrix}$，$P_BBQ_B=\begin{bmatrix}I_s & O\\ O & O\end{bmatrix}$。记

$$A'=P_AAQ_A=\begin{bmatrix}I_r & O\\ O & O\end{bmatrix},\ B'=P_BBQ_B=\begin{bmatrix}I_s & O\\ O & O\end{bmatrix},\ C'=P_BCQ_A=\begin{bmatrix}C_{11} & C_{12}\\ C_{21} & C_{22}\end{bmatrix}。$$

则

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix}A & O\\ C & B\end{bmatrix}=\operatorname{rank}\left(\begin{bmatrix}P_A & O\\ O & P_B\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A & O\\ C & B\end{bmatrix}\begin{bmatrix}Q_A & O\\ O & Q_B\end{bmatrix}\right)=\operatorname{rank}\begin{bmatrix}A' & O\\ C' & B'\end{bmatrix}。$$

把右端矩阵按分块写开，即

$$\begin{bmatrix}A' & O\\ C' & B'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}I_r & O & O & O\\ O & O & O & O\\ C_{11} & C_{12} & I_s & O\\ C_{21} & C_{22} & O & O\end{bmatrix}。$$

对它作初等变换：先用第一块行消去 C_{11},C_{21}，再交换第 $2,3$ 块列，交换第 $2,3$ 块行，最后用第二块列消去 C_{12}，可化为

$$\begin{bmatrix}I_r & O & O & O\\ O & I_s & O & O\\ O & O & O & O\\ O & O & C_{22} & O\end{bmatrix}。$$

因此 $\operatorname{rank}\begin{bmatrix}A & O\\ C & B\end{bmatrix}=r+s+\operatorname{rank}(C_{22})\geq r+s=\operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(B)$。

于是等号成立当且仅当 $C_{22}=O$。

先证充分性。 若存在矩阵 D,E 使 $C=DA+BE$，则 $\begin{bmatrix}I & O\\ -D & I\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A & O\\ C & B\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I & O\\ -E & I\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A & O\\ O & B\end{bmatrix}$，故

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix}A & O\\ C & B\end{bmatrix}=\operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(B)。$$

再证必要性。 若等号成立，则 $C_{22}=O$。此时取

$$D'=\begin{bmatrix}C_{11} & O\\ C_{21} & O\end{bmatrix},\qquad E'=\begin{bmatrix}O & C_{12}\\ O & O\end{bmatrix},$$

便有 $C'=D'A'+B'E'$。代回原矩阵，得

$$P_BCQ_A=D'P_AAQ_A+P_BBQ_BE'。$$

左右分别乘 P_B^{-1} 与 Q_A^{-1}，即得

$C = (P_B^{-1}D'P_A)A + B(Q_BE'Q_A^{-1})$。

记 $D = P_B^{-1}D'P_A$, $E = Q_BE'Q_A^{-1}$，则 $C = DA + BE$。必要性得证。

综上， $\operatorname{rank}\begin{bmatrix} A & O \\ C & B \end{bmatrix} \geq \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B)$，且等号成立当且仅当存在矩阵 D, E 使得 $C = DA + BE$。证毕。

六、（4' + 4' + 0'）

1. 证明：如果 A 是对称矩阵，则对 $\forall x \in \mathbb{R}^n$，$Ax = 0$ 当且仅当 $A^2x = 0$。
   证明： $Ax = 0 \Rightarrow A^2x = 0$ 显然成立。反过来，若 $A^2x = 0$，则由于 A 是对称矩阵，有 $0 = x^\top A^2x = x^\top A^\top Ax = (Ax)^\top(Ax)$，而 $(Ax)^\top(Ax)$ 是各分量平方和，只能在 $Ax = 0$ 时等于 0。故 $A^2x = 0 \Rightarrow Ax = 0$，从而 $Ax = 0$ 当且仅当 $A^2x = 0$。
2. 证明：如果 A 是对称矩阵，则对 $\forall n \in \mathbb{N}$，$\operatorname{rank}(A^n) = \operatorname{rank}(A)$。
   证明： 设 A 是 m 阶对称矩阵。先证对任意 $k \in \mathbb{N}$，都有 $\ker(A^k) = \ker(A)$。显然 $\ker(A) \subseteq \ker(A^k)$。下面证明反包含。
   对 k 作归纳。$k = 1$ 时显然成立。设 $\ker(A^k) = \ker(A)$ 已成立。若 $A^{k+1}x = 0$，令 $y = Ax$，则 $A^ky = 0$，由归纳假设得 $y \in \ker(A)$，即 $A^2x = 0$。再由第 1 题可知 $Ax = 0$，故 $x \in \ker(A)$。所以 $\ker(A^{k+1}) \subseteq \ker(A)$，从而 $\ker(A^{k+1}) = \ker(A)$。
   因此对任意 $k \in \mathbb{N}$，都有 $\ker(A^k) = \ker(A)$。由秩-零度定理，$\operatorname{rank}(A^k) = m - \dim\ker(A^k) = m - \dim\ker(A) = \operatorname{rank}(A)$。
   补充思路 1： 由第 1 题知齐次方程组 $Ax = 0$ 与 $A^2x = 0$ 同解，因此这两个方程组的基础解系所含向量个数相同。由秩-零度定理可得 $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A^2)$。又因为 A 对称，所以 $A^2, A^4, \ldots$ 也都对称，对第 1 题反复应用于 $A, A^2, A^4, \ldots$，可得
   $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A^2) = \operatorname{rank}(A^4) = \cdots = \operatorname{rank}(A^{2^s}) \qquad (s \geq 0)$。
   另一方面，对任意正整数 $p < q$，有 $A^q = A^pA^{q-p}$，故 $\operatorname{rank}(A^q) \leq \operatorname{rank}(A^p)$，所以数列 $\operatorname{rank}(A), \operatorname{rank}(A^2), \operatorname{rank}(A^3), \ldots$ 单调不增。对任意 $n \in \mathbb{N}$，取 s 使 $2^s \geq n$，则
   $\operatorname{rank}(A) \geq \operatorname{rank}(A^n) \geq \operatorname{rank}(A^{2^s}) = \operatorname{rank}(A)$,
   从而 $\operatorname{rank}(A^n) = \operatorname{rank}(A)$。
   补充思路 2： 先由第 1 题知齐次方程组 $Ax = 0$ 与 $A^2x = 0$ 同解，于是由秩-零度定理得 $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A^2)$。再证一般结论：若 $\operatorname{rank}(A^n) = \operatorname{rank}(A^{n+1})$，则对一切 $m > n$，都有 $\operatorname{rank}(A^m) = \operatorname{rank}(A^n)$。
   事实上，由 Frobenius 秩不等式
   $\operatorname{rank}(XY) + \operatorname{rank}(YZ) \leq \operatorname{rank}(Y) + \operatorname{rank}(XYZ)$,
   取 $X = A$, $Y = A^n$, $Z = A$，得
   $2\operatorname{rank}(A^{n+1}) \leq \operatorname{rank}(A^n) + \operatorname{rank}(A^{n+2})$。
   若 $\operatorname{rank}(A^n) = \operatorname{rank}(A^{n+1})$，则上式化为
   $\operatorname{rank}(A^{n+1}) \leq \operatorname{rank}(A^{n+2})$。
   而幂次增加时秩不增，即 $\operatorname{rank}(A^{n+2}) \leq \operatorname{rank}(A^{n+1})$，所以
   $\operatorname{rank}(A^{n+2}) = \operatorname{rank}(A^{n+1})$。
   再把同样论证依次用于 A^{n+1}, A^{n+2}，便可归纳得到对任意 $m > n$，都有 $\operatorname{rank}(A^m) = \operatorname{rank}(A^n)$。现在取 $n = 1$，便知对任意 $m \geq 1$，都有 $\operatorname{rank}(A^m) = \operatorname{rank}(A)$。

补充思路 3（正交对角化）： 由于 A 是实对称矩阵，所以存在正交矩阵 Q，使得
$A = Q\,\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)Q^\top$。
从而
$A^n = Q\,\mathrm{diag}(\lambda_1^n, \lambda_2^n, \ldots, \lambda_m^n)Q^\top$。
又因为正交相似变换不改变矩阵的秩，所以
$\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}\ \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m), \qquad \mathrm{rank}(A^n) = \mathrm{rank}\ \mathrm{diag}(\lambda_1^n, \lambda_2^n, \ldots, \lambda_m^n)$
。
而对任意 i，都有 $\lambda_i^n = 0 \iff \lambda_i = 0$。因此对角矩阵 $\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ 与 $\mathrm{diag}(\lambda_1^n, \ldots, \lambda_m^n)$ 的非零对角元个数相同，于是它们的秩相同。故
$\mathrm{rank}(A^n) = \mathrm{rank}(A)$。

3. 证明：如果 A 是反对称矩阵，则 $\mathrm{rank}(A)$ 是偶数。

证明： 对反对称矩阵 A 的阶数 n 作归纳。
当 $n = 1$ 时，反对称矩阵只能是零矩阵，故其秩为 0，是偶数，命题成立。当 $n = 2$ 时，任意 2 阶反对称矩阵都可以写成 $\begin{bmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{bmatrix}$ 的形式，其中 $a \in \mathbb{F}$。当 $a = 0$ 时，秩为 0；当 $a \neq 0$ 时，秩为 2。因此 2 阶反对称矩阵的秩也是偶数，命题成立。
设对所有 $n-2$ 阶反对称矩阵命题成立，下面证明 n 阶情形。
若 $A = O$，则 $\mathrm{rank}(A) = 0$，结论成立。若 $A \neq O$，则 A 中存在非零元素。又因为 A 是反对称矩阵，所以对角元满足 $a_{ii} = -a_{ii}$，从而 $a_{ii} = 0$。因此这个非零元素必在非对角线上。设 $a_{ij} \neq 0$，其中 $i \neq j$。
同时交换第 1 行与第 i 行、第 2 行与第 j 行，并同时作对应的列交换。这样的变换可写成 $PAP^\top$ 的形式，其中 P 是置换矩阵，因此既保持反对称性，又不改变矩阵的秩。不妨仍记变换后的矩阵为 A。此时矩阵左上角形成一个 2×2 的反对称分块 $A_1 = \begin{bmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{bmatrix}$，其中 $a \neq 0$
。由于 $\det(A_1) = a^2 \neq 0$，所以 A_1 可逆。
把 A 分块写成 $A = \begin{bmatrix} A_1 & B \\ -B^\top & C \end{bmatrix}$。取分块可逆矩阵 $L = \begin{bmatrix} I_2 & O \\ B^\top A_1^{-1} & I_{n-2} \end{bmatrix}$，$R = \begin{bmatrix} I_2 & -A_1^{-1}B \\ O & I_{n-2} \end{bmatrix}$，则直接计算得
$LAR = \begin{bmatrix} A_1 & O \\ O & C' \end{bmatrix}$，其中 $C' = C + B^\top A_1^{-1} B$。
因为 L, R 都可逆，所以秩不变，从而 $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(A_1) + \mathrm{rank}(C') = 2 + \mathrm{rank}(C')$
。又因为 $A_1^\top = -A_1$，故 $(A_1^{-1})^\top = -A_1^{-1}$，于是
$(C')^\top = C^\top + (B^\top A_1^{-1} B)^\top = -C - B^\top A_1^{-1} B = -C'$，
所以 C' 仍是反对称矩阵。由归纳假设，$\mathrm{rank}(C')$ 是偶数，因此 $\mathrm{rank}(A) = 2 + \mathrm{rank}(C')$ 也是偶数。
综上，任意反对称矩阵的秩都是偶数。证毕。