

中国科学技术大学数学科学学院 2025-2026 学年第 2 学期期末考试试卷

课程名称: 线性代数 (B1) 课程编号: MATH1009

考试时间: 2026 年 7 月 7 日 考试形式: 闭卷

姓名: _____ 学号: _____ 学院: _____

题号	一 (40 分)	二 (10 分)	三 (10 分)	四 (10 分)	五 (10 分)	六 (10 分)	七 (10 分)	总分 (100 分)
得分								

一、填空题: 本题共 8 小题, 每题 5 分, 共 40 分。

(1). 记 $\mathbb{R}_3[x]$ 为次数小于或等于 3 的所有实多项式组成的实线性空间. 已知 $f_1(x) = x^3 - x^2$, $f_2(x) = x^2 - x$, $f_3(x) = x - 1$, $f_4(x) = 1$ 为 $\mathbb{R}_3[x]$ 的一组基. 则 x^3 在这组基下的坐标为 $(1, 1, 1, 1)^T$.

(2). 设 \mathcal{A} 为三维欧氏空间上的第二类正交变换. 若 \mathcal{A} 有一个辐角为 $\frac{\pi}{2}$ 的复特征值, 则线性变换 $\mathcal{A} \circ \mathcal{A} + 2\mathcal{A}$ 的行列式为 -5 .

(3). 平面 \mathbb{R}^2 上的线性变换 $\mathcal{A}: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ 将单位圆 C 变成椭圆 E , 则椭圆 E 的长短半轴的长度分别为 $\sqrt{10} + 1$ 和 $\sqrt{10} - 1$.

(4). 若线性变换在某组基下的矩阵为 $\begin{pmatrix} 3 & 0 & -4 \\ x & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, 在另一组基下矩阵为 $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & y & \\ & & -1 \end{pmatrix}$, 则 $xy =$ -6 .

(5). 设 $V = \mathbb{F}^{2 \times 2}$, 记 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. 若 V 上的线性变换 \mathcal{A} 满足 $\mathcal{A}(M) = MA$. 则 \mathcal{A} 在基

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 下的矩阵为 $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

(6). 二次型 $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3$ 的规范形为 $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$.

(7). 设 \mathcal{A} 是 $4n - 1$ 维空间上的线性变换, 若 $\text{rank } \mathcal{A} = 3n$, 则 $\text{rank } \mathcal{A}^3$ 的取值范围是 $[n + 2, 3n]$.

(8). 超定线性方程组 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ 的最小二乘解为 $\mathbf{x} =$ $(\frac{14}{11}, \frac{3}{11})^T$.

以下第二到第七大题请写出详细解题过程，评分按步骤给分。

二、(10分) 计算题. 请计算矩阵高次幂 (要求结果中不能出现根式).

$$(1). \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}^{2026}, \quad (2). \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}^{2026}.$$

解. (1). 设 $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$. 则其特征多项式为

$$P_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 4 & -6 \\ 3 & \lambda + 5 \end{vmatrix} = (\lambda - 4)(\lambda + 5) + 18 = \lambda^2 + \lambda - 2 = (\lambda - 1)(\lambda + 2).$$

因此, 其特征值为 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2$.

解线性方程组 $(A - I)X = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -3 & -6 \end{pmatrix} X = 0$ 得特征向量 $\xi_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

类似地, 解线性方程组 $(A + 2I)X = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ -3 & -3 \end{pmatrix} X = 0$ 得特征向量 $\xi_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

令 $P = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. 则 $\det P = -1$, 故 $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ 以及 $A = P\Lambda P^{-1}$. 因此

$$A^{2026} = (P\Lambda P^{-1})^{2026} = P\Lambda^{2026}P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^{2026} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - 2^{2026} & 2 - 2^{2027} \\ 2^{2026} - 1 & 2^{2027} - 1 \end{pmatrix}.$$

(2) 设 $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. 直接计算可得

$$B^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ & -1 \end{pmatrix}$$

因此 $B^6 = I$.

从而我们有

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}^{2026} = 2^{2026} B^{2026} = 2^{2026} B^{6 \times 337 + 4} = 2^{2026} B^4 = -2^{2026} B.$$

$$\text{因此, } \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}^{2026} = \begin{pmatrix} -2^{2026} & -2^{2026} \\ 2^{2026} & 0 \end{pmatrix}.$$

注: 如果按 (1) 中的方法计算, 分值分配同 (1).

□

三、(10分) 记 $\mathbb{R}_3[x]$ 为次数小于或等于 3 的所有实多项式组成的实线性空间. 对任意 $f \in \mathbb{R}_3[x]$, 定义

$$\mathcal{D}(f) = -f + xf' + 2f' + f''.$$

(1). 验证 \mathcal{D} 为实线性空间 $\mathbb{R}_3[x]$ 上的线性变换.

(2). 线性变换 \mathcal{D} 是否可对角化? 为什么?

解. (1). 只需验证可加性与齐次性. 整理变换表达式:

$$\mathcal{D}(f) = -f + (x+2)f' + f''.$$

• 可加性: 任取 $f, g \in \mathbb{R}_3[x]$,

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(f+g) &= -(f+g) + (x+2)(f+g)' + (f+g)'' \\ &= -f-g + (x+2)f' + (x+2)g' + f'' + g'' \\ &= [-f + (x+2)f' + f''] + [-g + (x+2)g' + g''] = \mathcal{D}(f) + \mathcal{D}(g).\end{aligned}$$

• 齐次性: 任取 $k \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(kf) &= -(kf) + (x+2)(kf)' + (kf)'' \\ &= -kf + k(x+2)f' + kf'' = k \cdot [-f + (x+2)f' + f''] = k\mathcal{D}(f).\end{aligned}$$

可加、齐次均满足, 故 \mathcal{D} 是 $\mathbb{R}_3[x]$ 上的线性变换.

这第一问考察基本概念 (送分题), 只要学生提到要验证这两条性质, 就可以给满 4 分.

(2). \mathcal{D} 可对角化.

证明如下: 取标准基 $1, x, x^2, x^3$, 对单项式 x^n 计算:

$$\mathcal{D}(x^n) = -x^n + (x+2) \cdot nx^{n-1} + n(n-1)x^{n-2} = (n-1)x^n + 2nx^{n-1} + n(n-1)x^{n-2}.$$

分别代入 $n = 0, 1, 2, 3$:

$$\mathcal{D}(1) = -1, \quad \mathcal{D}(x) = 2, \quad \mathcal{D}(x^2) = 2 + 4x + x^2, \quad \mathcal{D}(x^3) = 6x + 6x^2 + 2x^3.$$

写出变换在基 $1, x, x^2, x^3$ 下的矩阵 M (列向量为各像的坐标):

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

M 为上三角矩阵, 对角元是全部特征值: $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 1, \lambda_4 = 2$, 四个特征值互不相同. 有限维线性空间上, 若线性变换的特征值两两互异, 则该变换可对角化.

因此 \mathcal{D} 可对角化. □

四、(10分) 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 13 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & -3 \end{pmatrix}$ 的QR分解. 即, 将 A 分解为正交矩阵和上三角矩阵的乘积.

解. 通过 Gram-Schmidt 正交化对列向量正交化、单位化, 逐步构造 Q 和 R . 设矩阵 $A = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$, 其中列向量为:

$$\alpha_1 = (2, 1, 2)^T, \quad \alpha_2 = (7, 1, -3)^T, \quad \alpha_3 = (13, -2, -3)^T$$

处理 α_1 : 令 $\beta_1 = \alpha_1$, 计算 β_1 的模长和单位化:

$$r_{11} = \|\beta_1\| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} = 3, \quad e_1 = \frac{\beta_1}{r_{11}} = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)^T$$

处理 α_2 : 投影系数 $r_{12} = (\alpha_2, e_1) = \alpha_2^T e_1 = 3$.

$$\beta_2 := \alpha_2 - r_{12}e_1 = (5, 0, -5)^T$$

计算 β_2 的模长和单位化:

$$r_{22} = \|\beta_2\| = \sqrt{5^2 + 0^2 + (-5)^2} = 5\sqrt{2}, \quad e_2 = \frac{\beta_2}{r_{22}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)^T$$

处理 α_3 : 投影系数 $r_{13} = (\alpha_3, e_1) = \alpha_3^T e_1 = 6$, $r_{23} = (\alpha_3, e_2) = \alpha_3^T e_2 = 8\sqrt{2}$

$$\beta_3 = \alpha_3 - r_{13}e_1 - r_{23}e_2 = (1, -4, 1)^T.$$

计算 β_3 的模长和单位化:

$$r_{33} = \|\beta_3\| = \sqrt{1^2 + (-4)^2 + 1^2} = 3\sqrt{2}, \quad e_3 = \frac{\beta_3}{r_{33}} = \left(\frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{-4}{3\sqrt{2}}, \frac{1}{3\sqrt{2}}\right)^T$$

最终 QR 分解结果: 正交矩阵 Q (以 e_1, e_2, e_3 为列向量) 为:

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{-4}{3\sqrt{2}} \\ \frac{2}{3} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

上三角矩阵 R (以 r_{ij} 为矩阵元) 为:

$$R = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 6 \\ 0 & 5\sqrt{2} & 8\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 3\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

□

五、(10分) 给定二次曲面在直角坐标系下的方程

$$3x_1^2 + 3x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3 = 1.$$

用正交变换将其化为标准方程, 并指出这是什么类型的二次曲面.

解. 二次型对应的实对称矩阵为 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$.

该矩阵的特征多项式 $P_A(\lambda) = |\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -1 & 1 \\ -1 & \lambda - 3 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda - 5 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda - 3)(\lambda - 6)$, 解得特征值:

$$\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 6.$$

分别求解齐次线性方程组 $(\lambda_i E - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$:

- 对 $\lambda_1 = 2$, 得基础解系 $\xi_1 = (-1, 1, 0)^T$;
- 对 $\lambda_2 = 3$, 得基础解系 $\xi_2 = (1, 1, 1)^T$;
- 对 $\lambda_3 = 6$, 得基础解系 $\xi_3 = (1, 1, -2)^T$.

将特征向量单位化, 构造正交矩阵 (实对称矩阵不同特征值的特征向量两两正交, 无需额外正交化):

$$Q = \left(\frac{\xi_1}{\|\xi_1\|}, \frac{\xi_2}{\|\xi_2\|}, \frac{\xi_3}{\|\xi_3\|} \right) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix},$$

作正交变换 $\mathbf{x} = Q\mathbf{y}$ (其中 $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)^T$), 该变换为直角坐标变换, 保持曲面几何形状不变。将正交变换代入原曲面方程, 二次型化为标准形, 得到曲面的标准方程:

$$2y_1^2 + 3y_2^2 + 6y_3^2 = 1.$$

该曲面为**椭球面**.

□

六、(10分) 设 A 为实方阵满足 $AA^T = A^T A$. 证明若存在实可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}AP$ 为对角阵, 则 A 为对称阵.

证明. 我们分三步完成证明:

步骤 1: 提取线性无关的实特征向量 设可逆矩阵 $P = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, 其中 $\alpha_i \in \mathbb{R}^n$ 是 P 的列向量. 记 $\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) := P^{-1}AP$, 按列展开等式 $AP = P\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, 得 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 是 A 的 n 个线性无关的实特征向量, 对应实特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

步骤 2: 矩阵 A 与 A^T 有相同的特征值和特征向量 对任意实向量 $x \in \mathbb{R}^n$ 和实数 λ , 分别计算 $Ax - \lambda x$ 与 $A^T x - \lambda x$ 的欧氏范数平方:

$$\begin{aligned}\|Ax - \lambda x\|^2 &= (Ax - \lambda x)^T (Ax - \lambda x) \\ &= x^T A^T Ax - \lambda x^T A^T x - \lambda x^T Ax + \lambda^2 x^T x, \\ \|A^T x - \lambda x\|^2 &= (A^T x - \lambda x)^T (A^T x - \lambda x) \\ &= x^T AA^T x - \lambda x^T Ax - \lambda x^T A^T x + \lambda^2 x^T x.\end{aligned}$$

由条件 $AA^T = A^T A$, 且对实向量有 $x^T Ax = x^T A^T x$ (一阶矩阵转置等于自身), 因此两式右端完全相等, 即:

$$\|Ax - \lambda x\|^2 = \|A^T x - \lambda x\|^2$$

对特征向量 α_i , 有 $A\alpha_i - \lambda_i \alpha_i = \mathbf{0}$, 故 $\|A\alpha_i - \lambda_i \alpha_i\|^2 = 0$, 代入上式得:

$$\|A^T \alpha_i - \lambda_i \alpha_i\|^2 = 0$$

由欧氏范数的正定性, 范数为 0 当且仅当向量为零向量, 因此:

$$A^T \alpha_i = \lambda_i \alpha_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

步骤 3: 推出 A 为对称矩阵 由上述结论, 对所有 i 有:

$$(A - A^T)\alpha_i = A\alpha_i - A^T \alpha_i = \lambda_i \alpha_i - \lambda_i \alpha_i = \mathbf{0}$$

由于 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 线性无关, 构成 \mathbb{R}^n 的一组基; 线性变换在一组基上的像全为零向量, 当且仅当该变换为零变换. 因此:

$$A - A^T = O \quad \Rightarrow \quad A^T = A$$

综上, A 为对称矩阵.

□

七、(10分)证明题.

(1). 如果 A 和 B 为同阶的正交方阵, 且 $\det A = -\det B$, 证明 $A + B$ 是奇异方阵.

(2). 设 A 为满足 $A^3 = A$ 的 n 阶复方阵. 证明 A 有 n 个线性无关的特征向量.

证明. (1). 因为正交矩阵均可逆, 且正交矩阵的逆矩阵、两个正交矩阵的乘积仍为正交矩阵, 故 $A^{-1}B$ 是正交矩阵. 对其计算行列式:

$$\det(A^{-1}B) = \det(A^{-1}) \cdot \det(B) = -1.$$

正交矩阵的特征值满足以下性质: 所有特征值的模长均为 1; 特征多项式的复根以共轭成对的形式出现, 任意一对共轭复特征值 μ 与 $\bar{\mu}$ 的乘积为

$$\mu \cdot \bar{\mu} = |\mu|^2 = 1$$

因此全体非实特征值的乘积为 1. 由于矩阵的行列式等于其所有特征值的乘积, 而 $\det(A^{-1}B) = -1$, 因此 $A^{-1}B$ 的全体实特征值的乘积必为 -1 . 又因为正交矩阵的实特征值只能取 1 或 -1 , 故 -1 必然是 $A^{-1}B$ 的一个特征值.

根据特征值定义, -1 是 $A^{-1}B$ 的特征值等价于 $\det(I + A^{-1}B) = 0$. 对 $\det(A + B)$ 提取公因子 A , 代入上式可得:

$$\det(A + B) = \det[A(I + A^{-1}B)] = \det(A) \cdot \det(I + A^{-1}B) = 0$$

(2). 设 λ 为特征值, x 为属于 λ 的特征向量. 则 $0 = (A^3 - A)x = (\lambda^3 - \lambda)x$. 由于特征向量非零, $\lambda^3 - \lambda = 0$. 因此 λ 只能取 $0, 1$ 或者 -1 . 分别在三个特征子空间 $V_A(0), V_A(1), V_A(-1)$ 中取基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$; $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$; 和 $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_t$. 将三组向量合并为向量组

$$\alpha_1, \dots, \alpha_r, \beta_1, \dots, \beta_s, \gamma_1, \dots, \gamma_t. \quad (*)$$

我们只需证明该向量组构成整个空间的一组基.

该向量组为一组生成元: 由条件 $A^3 = A$, 矩阵满足 $f(A) = 0$, 其中 $f(x) = x^3 - x = x(x-1)(x+1)$. 考察

$$f_1(x) = (x-1)(x+1), \quad f_2(x) = x(x+1), \quad f_3(x) = x(x-1),$$

显然满足恒等式

$$1 = -f_1(x) + \frac{1}{2}f_2(x) + \frac{1}{2}f_3(x).$$

将矩阵 A 代入, 得单位矩阵的如下分解

$$I = -f_1(A) + \frac{1}{2}f_2(A) + \frac{1}{2}f_3(A).$$

对任意 n 维复向量 ξ , 将上述矩阵等式同时作用于 ξ , 得:

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3$$

其中 $\xi_1 = -f_1(A)\xi$, $\xi_2 = \frac{1}{2}f_2(A)\xi$, $\xi_3 = \frac{1}{2}f_3(A)\xi$. 由 $f(x) = x \cdot f_1(x) = (x-1) \cdot f_2(x) = (x+1) \cdot f_3(x)$ 以及 $f(A) = 0$, 可得

$$\begin{aligned} A\xi_1 &= A \cdot (-f_1(A)\xi) = -Af_1(A)\xi = \mathbf{0} \\ (A-I)\xi_2 &= (A-I) \cdot \left(\frac{1}{2}f_2(A)\xi\right) = \frac{1}{2}(A-I)f_2(A)\xi = \mathbf{0} \\ (A+I)\xi_3 &= (A+I) \cdot \left(\frac{1}{2}f_3(A)\xi\right) = \frac{1}{2}(A+I)f_3(A)\xi = \mathbf{0} \end{aligned}$$

即 $\xi_1 \in V_A(0)$, $\xi_2 \in V_A(1)$, $\xi_3 \in V_A(-1)$. 由此可得 (*) 生成全空间.

该向量组线性无关: 设存在系数满 $\sum_{i=1}^r k_i \alpha_i + \sum_{j=1}^s l_j \beta_j + \sum_{k=1}^t m_k \gamma_k = \mathbf{0}$. 令 $u = \sum k_i \alpha_i$, $v = \sum l_j \beta_j$, $w = \sum m_k \gamma_k$, 则 $u + v + w = \mathbf{0}$. 由于属于不同特征值的特征向量线性无关, 必有 $u = v = w = \mathbf{0}$. 又因每组基本身线性无关, 故所有系数 $k_i = l_j = m_k = 0$, 因此合并向量组线性无关.

总而, 我们有 n 个线性无关的特征向量. □