同调代数期末考试

(12 题选 10 题)

2026 年 6 月 16 日

1. 计算 $\mathrm{Tor}_n^{\mathbb{Z}_6}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2)$.

2. 令 $R = \mathbb{C}[x]/(x^2)$. 证明 R_R 是内射模. *(提示: 使用 Baer 判别法)*

3. 考虑左 R-模的正合列

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0.$$

证明如果 $\mathrm{pd}_R(M') < \mathrm{pd}_R(M)$, 则 $\mathrm{pd}_R(M'') = \mathrm{pd}_R(M)$.

4. 设 R 是一个环, $\{0 \to A_i \to B_i \to C_i \to 0\}_{i \in I}$ 为一族 R-模短正合列. 证明它们的直和、直积也是正合列:

$$0 \to \bigoplus_{i \in I} A_i \to \bigoplus_{i \in I} B_i \to \bigoplus_{i \in I} C_i \to 0$$

$$0 \to \prod_{i \in I} A_i \to \prod_{i \in I} B_i \to \prod_{i \in I} C_i \to 0$$

5. 令 $R = \mathbb{C}\langle x, y, z\rangle/(xy + yx + z^2, yz + zy, xz + zx)$.

(1) 计算 $\mathbb{C}_R$ 的投射分解;

(2) 计算 $\mathrm{Ext}_R^n(\mathbb{C}_R, R)$.

(提示: $\mathbb{C}_R$ 的极小投射分解为: $0 \to R \to R^{\oplus 3} \to R^{\oplus 3} \to R \to \mathbb{C}_R \to 0$)

6. 陈述并证明蛇引理.

7. 判断以下范畴是否是加法范畴以及是否是 *Abel* 范畴, 并说明理由:

(1) 所有交换群构成的范畴 **Ab**.

(2) 所有自由交换群构成的 **Ab** 的满子范畴 **FreeAb**.

(3) 给定环 R, 所有有限生成 R-模构成的范畴 R-**mod**.

(4) 给定环 R, 所有有限生成投射 R-模构成的范畴 R-**proj**.

8. 记有限生成交换群范畴为 **FgAb**. 定义函子 $F:\mathbf{FgAb}\to\mathbf{FgAb}$ 如下: 对任意的 **FgAb** 中的对象 G, $F(G)=G_{\mathrm{tor}}$, 即 G 的扭子群; 对任意的态射 $f:G\to G'$, $F(f)$ 为 f 在 G_{tor} 上的限制. 证明 F 是一个函子, 且 F 不同构于恒等函子 $\mathrm{Id}:\mathbf{FgAb}\to\mathbf{FgAb}$.

9. 设 $\mathcal{C},\mathcal{D}$ 是 *Abel* 范畴。设 $F:\mathcal{C}\overset{\cong}{\rightleftarrows}\mathcal{D}:G$ 为一个加法函子伴随对，即有自然同构

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X),Y)\cong\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,G(Y)),\quad\forall X\in\mathrm{Ob}(\mathcal{C}),Y\in\mathrm{Ob}(\mathcal{D}).$$

证明:

(1) 若 G 保持满态射，则 F 保持投射对象.

(2) 若 F 保持单态射，则 G 保持内射对象.

10. 设 k 是一个域，A 为一个有限维 k-代数。证明 $A^{\vee}:=\mathrm{Hom}_k(A,k)$ 作为右 A-模是内射的. *(*提示: $-\otimes_A A$ 与 $\mathrm{Hom}_k(A,-)$ 为伴随函子*)*

11. 给定范畴 $\mathcal{C}$。考虑 $\mathcal{C}$ 中的以下交换图

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d] & A' \arrow[r] \arrow[d] & A'' \arrow[d] \\
B \arrow[r] & B' \arrow[r] & B''
\end{tikzcd}$$

证明:

(1) 若左右两个方形交换图都是拉回，则外部矩形交换图也是拉回.

(2) 若外部矩形交换图和右边的方形交换图都是拉回，则左边的方形交换图也是拉回.

12. 设 $\mathcal{A}$ 是 *Abel* 范畴。给定如下 $\mathcal{A}$ 中的拉回交换图

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{p_1} & X \\ \Big\downarrow{\scriptstyle p_2} & & \Big\downarrow{\scriptstyle s} \\ Y & \xrightarrow{t} & Z \end{array}$$

设 $K \xrightarrow{i} P$ 为态射 p_1 的核。证明 $K \xrightarrow{p_2 \circ i} Y$ 为态射 t 的核，即有如下行正合的交换图：

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & K & \xrightarrow{i} & P & \xrightarrow{p_1} & X \\ & & {\scriptstyle 1_K}\Big\downarrow & & {\scriptstyle p_2}\Big\downarrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle s} \\ 0 & \longrightarrow & K & \xrightarrow{p_2 i} & Y & \xrightarrow{t} & Z \end{array}$$