# 中国科学技术大学
# 2025–2026学年第二学期现代偏微分方程期中考试试题解析

考试时间：2026年4月21日 09:50–12:00　　开课院系：数学科学学院

**试题 1** (20分). 设$B \subset \mathbb{R}^d$是单位开球，$u \in H^1(B)$满足$\nabla u = \mathbf{0}$在$B$中几乎处处成立，证明：存在常数$C$使得$u(\boldsymbol{x}) = C$在$B$中几乎处处成立。

注：本题不允许使用 Poincaré 不等式的结论，因为该题结论被用于证明 Poincaré 不等式，除非你用不依赖该题结论的方法去证明 Poincaré 不等式。

**解析.** 本题是默写题，来自讲义习题1.2.6（作业1第4题）以及Evans PDE书的习题5.11. 因为这道题假设了区域是球，所以根本不需要像一般区域那样讨论 $E = \{\boldsymbol{x} \in B : \exists r > 0$ 使得 $B(\boldsymbol{x}, r) \subset B$ 且 $f = C$ 几乎处处在 $B(\boldsymbol{x}, r)$ 中成立$\}$ 的开闭性，这是因为对一般区域$U$, 缩水区域 $U_\varepsilon$ 未必是连通集。

证明. 记$B_r = B(\mathbf{0}, r)$. 对于意 $\varepsilon \in (0,1)$ 取标准磨光核 $\eta_\varepsilon$，在 $B_{1-\varepsilon}$ 上定义正则化函数 $f_\varepsilon = \eta_\varepsilon * f$，则$f_\varepsilon \in C^\infty(B_{1-\varepsilon})$. 对任意 $\boldsymbol{x} \in B_{1-\varepsilon}$，对其求梯度有：

$$\nabla f_\varepsilon(\boldsymbol{x}) = \nabla(\eta_\varepsilon * f)(\boldsymbol{x}) = (\eta_\varepsilon * \nabla f)(\boldsymbol{x}) = 0 \quad \text{a.e. in } B_{1-\varepsilon}.$$

因为 $B_{1-\varepsilon}$ 连通且 $f_\varepsilon$ 光滑，这必然推出 $f_\varepsilon$ 在整个 $B_{1-\varepsilon}$ 上恒为常数，记作 $C_\varepsilon$.

接下来任固定一个 $\delta \in (0,1)$, 考察内球 $B_{1-\delta}$. 当 $0 < \varepsilon < \delta$ 时，在 $B_{1-\delta}$ 上始终有 $f_\varepsilon(\boldsymbol{x}) \equiv C_\varepsilon$. 当 $\varepsilon \to 0^+$ 时，$f_\varepsilon$ 在 $L^2(B_{1-\delta})$ 中收敛于 $f$. 这意味着常值序列 $\{C_\varepsilon\}$ 在 $L^2(B_{1-\delta})$ 中收敛，所以必定存在实常数 $C$，使得 $C_\varepsilon \to C$. 进而得出在 $B_{1-\delta}$ 中有 $f = C$ a.e. 成立。

这个$C$不依赖于 $\delta$ 选取，由于 $\delta \in (0,1)$ 是任意给定的，令 $\delta \to 0^+$可得，$f = C$ a.e. in $B_1$. □

**试题 2** (20分). 给定$f \in L^2(U)$, 考虑方程 $\Delta^2 u = f$ in $U$，$u = \frac{\partial u}{\partial N} = 0$ on $\partial U$, 其中$N$是$\partial U$的单位外法向量。

(1) (5分) 写出弱解$u \in H_0^2(U)$的定义。

(2) (15分) 证明弱解的存在唯一性。

**解析.** 本题是默写题，来自讲义习题2.2.2（作业2第1题）以及Evans PDE书的习题6.3.

证明. (1) 定义双线性型 $B : H_0^2(U) \times H_0^2(U) \to \mathbb{R}$ 为

$$B[u, v] = \int_U \Delta u \Delta v \, \mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

我们称 $u \in H_0^2(U)$ 是该方程的弱解，是指对任意 $v \in H_0^2(U)$ 成立等式 $B[u, v] = \int_U f v \, \mathrm{d}\boldsymbol{x}$.

(2) 定义线性泛函 $F: H_0^2(U) \to \mathbb{R}$ 为 $F(v) = \int_U fv \, \mathrm{d}\boldsymbol{x}$. 现在需要验证 $B$ 的有界性、强制性以及 $F$ 的有界性。据 Cauchy-Schwarz 不等式与 Poincaré 不等式有：

$$|F(v)| \leqslant \|f\|_{L^2(U)}\|v\|_{L^2(U)} \leqslant C\|f\|_{L^2(U)}\|v\|_{H_0^2(U)}$$

因此 $F$ 是 $H_0^2(U)$ 上的有界线性泛函。再用 Cauchy-Schwarz 不等式有

$$|B[u,v]| \leqslant \|\Delta u\|_{L^2(U)}\|\Delta v\|_{L^2(U)} \leqslant \|u\|_{H_0^2(U)}\|v\|_{H_0^2(U)}.$$

因此 $B$ 在 $H_0^2(U)$ 上是有界的。接下来证明强制性，对任意 $u \in H_0^2(U)$，有 $B[u,u] = \int_U |\Delta u|^2 \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \|\Delta u\|_{L^2(U)}^2$. 在空间 $H_0^2(U)$ 中，$u, \nabla u$的边值都是零，故分部积分两次可得（先对$C_c^\infty$证明，然后光滑逼近）

$$\int_U |\Delta u|^2 \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_U \sum_{i,j=1}^d |\partial_i \partial_j u|^2 \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \|\nabla^2 u\|_{L^2(U)}^2.$$

结合 Poincaré 不等式，$\|\Delta u\|_{L^2(U)}$ 是 $H_0^2(U)$ 的一个等价范数。因此存在 $\alpha > 0$ 使得

$$B[u,u] \geqslant \alpha \|u\|_{H_0^2(U)}^2,$$

这就证明了 $B$ 的强制性。

据 Lax-Milgram 定理，存在唯一 $u \in H_0^2(U)$，使得对所有 $v \in H_0^2(U)$ 都有 $B[u,v] = F(v)$. □

**试题 3** (20分). 令$\Sigma$是$(-\Delta)$算子(带Dirichlet零边值条件)的全体特征值构成的集合。给定正实数 $\lambda \notin \Sigma$ 和函数 $f \in L^2(U)$，设 $u \in H_0^1(U)$ 为方程 $-\Delta u = \lambda u + f$ in $U, u = 0$ on $\partial U$ 不恒为零的弱解。证明：存在常数 $C > 0$ 使得 $\|u\|_{L^2(U)} \leqslant C\|f\|_{L^2(U)}$.

**解析.** 本题是默写题，来自讲义习题2.3.1（作业2第4题）以及Evans PDE书324页定理6.2.6.

*证法一.* 反证法，假设不存在这样的常数 $C > 0$。那么存在序列 $\{f_k\}$ 及 $\{u_k\}$ 满足 $-\Delta u_k = \lambda u_k + f_k$，且 $\|u_k\|_{L^2(U)} > k\|f_k\|_{L^2(U)}$. 定义归一化序列 $v_k = \frac{u_k}{\|u_k\|_{L^2}}$ 和 $\tilde{f}_k = \frac{f_k}{\|u_k\|_{L^2}}$，则有 $\|v_k\|_{L^2} = 1$，且 $\|\tilde{f}_k\|_{L^2} < \frac{1}{k} \to 0$.

据方程弱解定义知

$$\int_U |\nabla v_k|^2 \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \lambda(v_k, v_k) + (\tilde{f}_k, v_k) \leqslant \lambda \|v_k\|_{L^2}^2 + \|\tilde{f}_k\|_{L^2}\|v_k\|_{L^2} \leqslant |\lambda| + \|\tilde{f}_k\|_{L^2}.$$

所以$\{v_n\}$在$H_0^1$一致有界，进而存在子序列在 $H_0^1(U)$ 中弱收敛，且（据紧嵌入）在 $L^2(U)$ 中强收敛于 $v$. 故 $\|v\|_{L^2} = 1$ $(v \not\equiv 0)$.

现在在方程弱形式 $\int_U \nabla v_k \cdot \nabla \varphi \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \lambda(v_k, \varphi) + (\tilde{f}_k, \varphi)$ $(\varphi \in H_0^1(U))$ 中令$k \to \infty$，代入上面弱收敛和强收敛的结果得到 $\int_U \nabla v_k \cdot \nabla \varphi \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \lambda(v, \varphi)$，这表明 $v$ 是齐次方程 $-\Delta v = \lambda v$ in $U, v|_{\partial U} = 0$ 的弱解，进而 $\lambda$

是 $L$ 的特征值，与 $\lambda \notin \Sigma$ 矛盾。 $\square$

证法二. 区域 $U$ 有界且边界光滑，所以$(-\Delta)$ (带 Dirichlet 零边值条件)的特征函数系可以构成 $L^2(U)$ 的一组标准正交基 $\{w_k\}_{k=1}^\infty$，且有 $-\Delta w_k = \lambda_k w_k$ in $U$, $w_k = 0$ on $\partial U$ 以及 $w_k \in H_0^1(U) \cap C^\infty(U)$. 特征值是可列的 $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leqslant \cdots \to +\infty$. 将解 $u \in H_0^1(U)$ 和源项 $f \in L^2(U)$ 按此基展开$u = \sum_{k=1}^\infty (u, w_k)_{L^2(U)} w_k, f = \sum_{k=1}^\infty (f, w_k)_{L^2(U)} w_k$. 因为 $u$ 是 $-\Delta u = \lambda u + f$ 的弱解，选取测试函数 $v = w_k \in H_0^1(U)$ 得

$$\int_U \nabla u \cdot \nabla w_k \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \lambda \int_U u w_k \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \int_U f w_k \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

由于 $w_k$ 是特征函数，分部积分得上式左边等于 $\lambda_k (u, w_k)_{L^2(U)}$，而等式右侧为 $\lambda(u, w_k)_{L^2(U)} + (f, w_k)_{L^2(U)}$. 因此得到 $(\lambda_k - \lambda)(u, w_k)_{L^2(U)} = (f, w_k)_{L^2(U)}$.

今已知正实数 $\lambda \notin \Sigma$，所以 $D := \inf_{k \geqslant 1} |\lambda_k - \lambda| > 0$，由此可得$\sum_{k=1}^\infty (u, w_k)_{L^2(U)}^2 \leqslant D^{-2} \sum_{k=1}^\infty (f, w_k)_{L^2(U)}^2$.据 Parseval 恒等式即得结论 $\|u\|_{L^2(U)}^2 \leqslant D^{-2} \|f\|_{L^2(U)}^2$. $\square$

4A、4B两道题中选一道题作答。

**试题 4A** (20分). 定义区域 $U = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x > 1, -\frac{1}{x} < y < \frac{1}{x}\right\}$.

(1) (10分) 证明：对任意$f \in H_0^1(U)$成立不等式

$$\iint_U x^2 |f(x,y)|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leqslant \iint_U |\nabla f(x,y)|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

(2) (10分) 设$\{f_n\}$满足$\sup_n \|f_n\|_{H_0^1(U)} \leqslant 1$，它是否一定存在子列$\{f_{n_k}\}$在$L^2(U)$中强收敛？证明结论。

提示：(1) 注意 $H_0^1(U)$ 函数的边值是零。

**解析.** 本题是一个无界区域仍然具有紧嵌入的例子。因为在无穷远处区域“高度”趋于零，所以阻止了“一坨鼓包逃逸到无穷远”这种紧性被破坏的方式。作业题中与之想法完全类似的是 $H_{rad}^1(\mathbb{R}^d)$到$L^q(\mathbb{R}^d)$ 的紧嵌入（问题1.4.5，作业1第10题），而那道题里面做到“无穷远处区域‘高度’趋于零”是依靠 Strauss 径向引理（问题1.4.4，作业1第9题）。

证明. (1) 据稠密性，不妨设 $f \in C_c^\infty(U)$. 对$(x,y) \in U$, $y < 0$用微积分基本定理得 $f(x,y) = \int_{-1/x}^y \partial_y f(x,t)\,\mathrm{d}t$. 由 Cauchy–Schwarz 不等式得到

$$|f(x,y)|^2 \leqslant (y + \frac{1}{x}) \int_{-1/x}^y |\partial_y f(x,t)|^2 \,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{x} \int_{-1/x}^{1/x} |\partial_y f(x,t)|^2 \,\mathrm{d}t.$$

再对$y$变量在$(-1/x,0)$积分得到

$$\int_{-1/x}^{0}|f(x,y)|^2\,\mathrm{d}y\leqslant\left(\int_{-1/x}^{0}\left(y+\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}y\right)\int_{-1/x}^{1/x}|\partial_y f(x,t)|^2\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2x^2}\int_{-1/x}^{1/x}|\partial_y f(x,t)|^2\,\mathrm{d}t.$$

同理对 $(x,y)\in U,\ y\geqslant 0$ 有

$$\int_{0}^{1/x}|f(x,y)|^2\,\mathrm{d}y\leqslant\frac{1}{2x^2}\int_{-1/x}^{1/x}|\partial_y f(x,t)|^2\,\mathrm{d}t.$$

两式相加得到

$$x^2\int_{-1/x}^{1/x}|f(x,y)|^2\,\mathrm{d}y\leqslant\int_{-1/x}^{1/x}|\partial_y f(x,y)|^2\,\mathrm{d}y.$$

再对$x$变量积分即得要证的不等式。

(2) 存在。首先我们作截断，对任意 $R\geqslant 2$，定义 $U_R:=U\cap\{(x,y):x<R\}$. 由于 $U_R$ 有界，据紧嵌入有 $H^1(U_R)\hookrightarrow\hookrightarrow L^2(U_R)$，进而对固定的$R\geqslant 2$，$\{f_n\}$有在$L^2(U_R)$中强收敛的子序列 $\{f_n^{(2)}\}$，然后从 $\{f_n^{(2)}\}$ 中提取子列 $\{f_n^{(3)}\}$ 使其在 $L^2(U_3)$ 中强收敛，不断重复该过程，进而我们得到对角线子列 $g_k=f_k^{(k)}$，则序列 $\{g_k\}$ 满足：对任何固定的有界区域 $U_R$，它在 $L^2(U_R)$ 中都是柯西列。

现在据(1)，对固定的$R>0$成立

$$\iint_{U\setminus U_R}|g_k|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\leqslant\frac{1}{R^2}\iint_{U\setminus U_R}x^2|g_k|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\leqslant\frac{1}{R^2}\iint_{U\setminus U_R}|\nabla g_k|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}dy\leqslant\frac{1}{R^2}.$$

接下来我们证明 $\{g_k\}$ 是 $L^2(U)$ 中的柯西列。任取$\varepsilon>0$，我们总能取到充分大的$R$使得$1/R^2<\varepsilon$，进而对任意 $l,m$ 成立

$$\iint_{U\setminus U_R}|g_m-g_l|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\leqslant 2\iint_{U\setminus U_R}|g_m|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+2\iint_{U\setminus U_R}|g_l|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y<4\varepsilon.$$

固定这个$R$，又因为$\{g_k\}$在 $L^2(U_R)$ 中是柯西列，所以存在$N>0$使得对任意 $m,l>N$ 有

$$\iint_{U_R}|g_m-g_l|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y<\varepsilon.$$

相加即得

$$\|g_m-g_l\|_{L^2(U)}^2=\iint_{U_R}|g_m-g_l|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\iint_{U\setminus U_R}|g_m-g_l|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y<5\varepsilon.$$

□

**试题 4B** (20分). 设维数$d\geqslant 2$, 函数$u\in C^3(U)\cap C^1(\overline{U})$是如下方程的经典解。

$$\Delta u=-2\ \ (\boldsymbol{x}\in U),\qquad u|_{\partial U}=0.$$

(1) (12分) 证明：$\max_{\overline{U}}|\nabla u|^2\geqslant\frac{4}{d}\max_{\overline{U}}u$；且当等号成立时，$U$一定是球，并求出此时$u$的表达式。

(2) (8分) 设$\lambda_1$是$(-\Delta)$算子在$U$上(带Dirichlet零边值条件)的最小特征值，$|U|$为$U$的Lebesgue测度。证明：$\int_U u\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}<2|U|/\lambda_1$.

提示：使用极值原理的过程中，$|\nabla^2u|^2$ 的下界怎么算？

**解析.** 本题是 Bernstein 技巧的简单应用，上课讲过调和函数的内梯度估计（定理2.6.4），作业也算过一个例子（习题2.6.1、作业2第6题，Evans PDE习题6.8.）本题不需要使用任何截断函数。第二问利用 $\lambda_1$ 的极小性和 Cauchy–Schwarz 不等式即得结论。

证明. (1) 定义辅助函数 $w=|\nabla u|^2+\frac{4}{d}u$，直接计算并代入方程

$$\Delta w=2|\nabla^2u|^2+\frac{4}{d}\Delta u=2|\nabla^2u|^2-\frac{8}{d}.$$

据柯西不等式有 $(\Delta u)^2=(\sum_{i=1}^d\partial_i^2u)^2\leqslant d\sum_{i=1}^d(\partial_i^2u)^2\leqslant d|\nabla^2u|^2$. 代入 $\Delta u=-2$ 得到 $4\leqslant d|\nabla^2u|^2$，从而 $\Delta w\geqslant 0$，由极大值原理，$w$ 在$\overline{U}$ 上的最大值必在边界 $\partial U$ 上取得。由于 $\partial U$ 上 $u=0$，边界上 $w=|\nabla u|^2$，所以

$$\frac{4}{d}\max_{\overline{U}}u\leqslant\max_{\overline{U}}\left(|\nabla u|^2+\frac{4}{d}u\right)=\max_{\partial U}|\nabla u|^2\leqslant\max_{\overline{U}}|\nabla u|^2.$$

若函数 $u$ 使得等号成立，那么由强极值原理得 $w\equiv C$ in $U$，这意味着 $\Delta w=0$，且柯西不等式取等。由柯西不等式的取等条件得知，此时 Hessian 方阵必须是对角阵且对角元全都相等，再结合 $-\Delta u=2$ 得到 $\partial_i^2u=-2/d$ 对 $1\leqslant i\leqslant d$ 成立，这就解得

$$u(\boldsymbol{x})=C_0+\mathbf{b}\cdot\boldsymbol{x}-\frac{1}{d}|\boldsymbol{x}|^2=C_1-\frac{1}{d}|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|^2.$$

而边界条件是 $u|_{\partial U}=0$，所以 $\partial U=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^d:|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|^2=dC_1\}$，这正是以 $\boldsymbol{x}_0$ 为球心，$\sqrt{dC_1}$为半径的球。此时 $u(\boldsymbol{x})=\frac{R^2-|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|^2}{d}$.

(2) 将方程 $\Delta u=-2$ 两边同乘 $u$，分部积分得到$\int_U|\nabla u|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}=2\int_U u\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$. 由第一特征值的变分刻画得到 $\lambda_1\int_U u^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\leqslant\int_U|\nabla u|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$. 而另一方面由 Cauchy–Schwarz 不等式得 $(\int_U u\,\mathrm{d}\boldsymbol{x})^2\leqslant|U|\int_U u^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$. 综合如上三式得到 $\int_U u\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\leqslant 2|U|\lambda_1^{-1}$.

接下来证明等号不可能成立。事实上若等号成立，则$u$一定是$\lambda_1$的特征函数，进而$-\Delta u=\lambda_1 u$ in $U$，这与 $-\Delta u=2$为常数矛盾，因为只会导致$u\equiv 2/\lambda_1$，这和零边值不合。 □

5A、5B两道题中选一道题作答。

**试题 5A** (40分，含15分附加题). 设$B\subset\mathbb{R}^3$是单位开球, 常数$\mu>0$. 考虑椭圆算子$L_\mu u:=-\Delta u-\frac{\mu}{|\boldsymbol{x}|^2}u$并定义

$$\lambda_1(\mu):=\inf_{w\in\mathcal{A}}I[w],\qquad I[w]:=\int_B|\nabla w|^2-\frac{\mu}{|\boldsymbol{x}|^2}w^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x},\quad \mathcal{A}:=\{w\in H_0^1(B):\|w\|_{L^2(B)}=1\}.$$

(1) (12分) 设 $0<\mu<1/4$, 证明：存在$u\in\mathcal{A}$, 使得$I[u]=\inf_{w\in\mathcal{A}}I[w]$.

(2) (22分) 对(1)中求得的极小化子$u\in H_0^1(B)$，证明如下结论：

(2a) (13分) $u$是方程$L_\mu u=\lambda_1(\mu)u$ in $B$, $u=0$ on $\partial B$的弱解；

(2b) (9分，附加题) $u>0$ a.e. in $B$.

(3) (6分，附加题) 若$\mu>1/4$，证明：$\lambda_1(\mu)=-\infty$.

本题可使用Hardy不等式：对$d\geqslant 3$, $u\in H_0^1(U)$ 有 $\int_U|\nabla u|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\geqslant\frac{(d-2)^2}{4}\int_U\frac{u^2}{|\boldsymbol{x}|^2}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$.

提示：请注意(1)中所得的极小化子$\boxed{\text{不属于}H^2(B)}$.

**解析.** 本题考虑的是带有 Hardy 位势的椭圆算子特征值问题解的存在性，改编自没有位势的情况（作业2的第3题，问题2.2.1）。第一问是基本的，也就是通过 $I[w]$ 给出一个与 $H_0^1(B)$ 等价的范数，然后利用范数的弱下半连续性即得结论，这和作业题证法一样。第(2a)问则可以用变分法（但要注意扰动后的函数还在 $\mathcal{A}$ 里面）也可以用 Lax–Milgram 定理的方法证明。第(2b)问需注意在使用极值原理时要挖掉原点附近的部分（不能只挖原点），因为解不是整体 $C^2$ 的。而最后一问涉及反例的具体构造，也就是通过 $\mu>1/4$ 让 $I[w]$ 中的具有奇异性的位势项占主导，而最容易算的情况就是取形如 $|\boldsymbol{x}|^{-a}$ 的幂函数进去配凑（对应第一节课讲 Sobolev 空间时举的例子）。

证明. (1) **第一步：证明$\lambda_1$是有限数（实际上是非负的）。** 由Hardy不等式得到

$$I[w]=\int_B|\nabla w|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}-\mu\int_B\frac{w^2}{|x|^2}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\geqslant\int_B|\nabla w|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}-4\mu\int_B|\nabla w|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}=(1-4\mu)\int_B|\nabla w|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

而$1-4\mu>0$，所以对所有 $w\in\mathcal{A}$ 恒有 $I[w]\geqslant 0$，因此 $\lambda_1(\mu)\geqslant 0$. 同时取任意 $v\in C_c^\infty(B)\cap\mathcal{A}$ 显然有 $I[v]<+\infty$，故下确界是有限的实数。

**第二步：构造极小化序列的极限$u$.** 设 $\{w_n\}\subset\mathcal{A}$ 是 $I[w]$ 的极小化序列，即 $\lim_{n\to\infty}I[w_n]=\lambda_1(\mu)$. 再由Hardy不等式得到

$$I[w_n]\geqslant(1-4\mu)\int_B|\nabla w_n|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

由于 $1-4\mu>0$ 且 $I[w_n]$ 有界，序列 $\{w_n\}$ 在 $H_0^1(B)$ 中是一致有界的。由 $H_0^1$ 自反以及紧嵌入定理，存在子列（仍记作$\{w_n\}$）

$$w_n\rightharpoonup u\quad\text{in }H_0^1(B),\qquad w_n\to u\quad\text{in }L^2(B).$$

由 $L^2$ 的强收敛，$\|u\|_{L^2(B)}=\lim_n\|w_n\|_{L^2(B)}=1$，故 $u\in\mathcal{A}$.

**第三步：证明$u$就是极小化子。** 再次使用 Hardy 不等式得知 $(1-4\mu)\int_B |\nabla w|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \leqslant I[w] \leqslant \int_B |\nabla w|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ 对任意 $w \in H_0^1(B)$ 都成立，所以 $I[w]$ 给出了一个与 $\|\cdot\|_{H_0^1(B)}$ 等价的范数，由范数的弱下半连续性得到 $I[u] \leqslant \liminf_{n\to\infty} I[w_n] = \lambda_1(\mu)$. 由于 $u \in \mathcal{A}$，必有 $I[u] \geqslant \lambda_1(\mu)$，故 $I[u] = \lambda_1(\mu)$，$u$ 即为极小化子。

**(2a) 证法一：变分法。**对任意 $v \in H_0^1(B)$，构造摄动 $w_t = \frac{u+tv}{\|u+tv\|_{L^2}} \in \mathcal{A}$. 定义 $j(t) = I[w_t] = \frac{I[u+tv]}{\|u+tv\|_{L^2}^2}$. 由于 $u$ 是极小化子，$j(t)$ 在 $t=0$ 处取得最小值，因此 $j'(0)=0$. 计算导数得到

$$j'(0) = \frac{\left(2\int_B \nabla u\cdot\nabla v\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} - 2\mu\int_B \frac{uv}{|x|^2}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right)\|u\|_{L^2}^2 - I[u]\left(2\int_B uv\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right)}{\|u\|_{L^2}^4}$$

代入 $\|u\|_{L^2}=1$ 和 $I[u]=\lambda_1(\mu)$，令分子为0即得：

$$\int_B \nabla u\cdot\nabla v\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} - \mu\int_B \frac{uv}{|x|^2}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \lambda_1(\mu)\int_B uv\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

这正是弱解的定义。

**(2a) 证明二：Lax–Milgram定理。**定义与算子 $L_\mu$ 对应的双线性形式 $B[\cdot,\cdot] : H_0^1(B)\times H_0^1(B) \to \mathbb{R}$ 为：

$$B[u,v] = \int_B \nabla u\cdot\nabla v\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} - \mu\int_B \frac{uv}{|x|^2}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

- 有界性：由Cauchy–Schwarz 不等式和 Hardy 不等式得

$$\begin{aligned}|B[u,v]| &\leqslant \|\nabla u\|_{L^2}\|\nabla v\|_{L^2} + \mu\left\|\frac{u}{|\boldsymbol{x}|}\right\|_{L^2}\left\|\frac{v}{|\boldsymbol{x}|}\right\|_{L^2}\\ &\leqslant \|\nabla u\|_{L^2}\|\nabla v\|_{L^2} + \mu(2\|\nabla u\|_{L^2})(2\|\nabla v\|_{L^2}) = (1+4\mu)\|\nabla u\|_{L^2}\|\nabla v\|_{L^2}.\end{aligned}$$

- 强制性：前面已经验证了对任意 $w \in H_0^1(B)$ 有 $B[w,w] = I[w] \geqslant (1-4\mu)\|w\|_{H_0^1(B)}$.

接下来构造“解算子”。给定 $f \in H_0^1(B)$，定义线性泛函 $F(v) = \int_B fv\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$，则由 Poincaré不等式易知 $F$ 是 $H_0^1(B)$ 上的有界线性泛函。据 Lax-Milgram 定理，存在唯一的弱解 $u \in H_0^1(B)$，使得对所有的 $v \in H_0^1(B)$ 都成立 $B[u,v] = \int_B fv\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = (f,v)_{L^2}$. 据此我们定义有界线性算子 $S : H_0^1(B) \to H_0^1(B)$ 为 $Sf = u$. 接下来我们证明 $S$ 是 $H_0^1(B)$ 上的对称紧算子。

- 紧性。计算 $B[Sf,Sf] = \int_B f(Sf)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ 即得 $\|Sf\|_{H_0^1} \leqslant C(1-4\mu)^{-1}\|f\|_{L^2}$，再由紧嵌入即得包含映射 $i : H_0^1(B) \to L^2(B)$ 是紧算子，而 $J : L^2 \to H_0^1$ 定义为 $B[Jf,v] = \int_B fv\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ 是 $L^2(B) \to H_0^1(B)$ 的有界线性算子，这样 $S = J\circ i$ 为 $H_0^1(B)$ 上的紧算子。
- 对称性。对 $f,g \in H_0^1(B)$，可直接验证 $B[Sf,g] = \int_B fg\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = B[f,Sg]$.
- 严格正性：这在验证紧性的时候已经证过了。

根据 Hilbert–Schmidt 谱定理得 $S$ 在 $H_0^1(B)$（赋予由 $B[\cdot,\cdot]$ 给出的内积）中存在由其特征函数构成的标准正

交基，且特征值$\eta_1 \geqslant \eta_2 \geqslant \cdots > 0$, $\eta_k \to 0$，其最大特征值 $\eta_1$ 有刻画

$$\eta_1 = \sup_{f\neq 0} \frac{B[Sf,f]}{B[f,f]} = \sup_{f\neq 0} \frac{\int_B f^2 \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{B[f,f]} = \frac{1}{\inf\limits_{f\neq 0} \frac{B[f,f]}{\|f\|^2_{L^2(B)}}} = \frac{1}{\lambda_1(\mu)}.$$

这说明极小化子 $u$ 就是 $\eta_1$ 的特征函数，进而 $Su = \lambda_1(\mu)^{-1}u$ 在弱意义下成立，这直接得出 $L_\mu u = \lambda_1(\mu)u$ 在弱意义下成立。

(2b) 由于 $|u| \in \mathcal{A}$ 以及 $|\nabla|u|| = |\nabla u|$ a.e. 成立，所以 $I[|u|] = I[u]$，说明 $|u|$ 也是极小化子，故不妨设 $u \geqslant 0$ a.e. 成立，进而是特征值问题的非负弱解。现在考虑环形区域 $A_r := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 : r < |\boldsymbol{x}| < 1\}$，其中 $0 < r < 1$. 固定 $r$，此时椭圆算子 $-\Delta - \frac{\mu}{|\boldsymbol{x}|^2}I$ 系数在$A_r$上是光滑的，由椭圆正则性定理，可证得$u$在$A_r$上是光滑的（只要证到能用极值原理即可）。现在对$-\Delta u = (\frac{\mu}{|\boldsymbol{x}|^2} + \lambda_1)u \geqslant 0$ 在 $A_r$ 上使用强极值原理得到：

如果$u$在该$A_r$里面不恒为零，那么 $u > 0$ in $A_r$.

接下来证明不存在$r \in (0,1)$使得$u \equiv 0$ in $A_r$，实际上这是“强唯一延拓定理”的结论。

**证法一：连通性方法**。定义集合 $E := \{\boldsymbol{x} \in \check{B} : u(\boldsymbol{x}) = 0\}$. 首先显然 $E$ 是闭集（这是连续性的定义），接下来验证 $E$ 是开集。为此，任取 $\boldsymbol{x}_0 \in E$，令 $r_0 = |\boldsymbol{x}_0|/2$，则由强极值原理得到 $u \equiv 0$ in $A_{r_0}$ (因为$u$在这个环形区域的内点取到非正最小值)，所以这导致 $B(\boldsymbol{x}_0, r_0) \subset E$. 而现在如果 $E$ 非空，就必定导致 $E = \check{B}$，进而 $u \equiv 0$ 在去心球 $\check{B}$ 里面恒成立，这与 $\int_B u^2 \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = 1$ 矛盾。

**证法二：反证法**。如果存在某个$r \in (0,1)$使得$u|_{A_r} \equiv 0$，而另一方面又存在$s \in (0,r)$使得$u$在$A_s$上不恒为0。今取$r_1 \in (r,1)$，那么在环形区域$A := A_s \setminus \overline{A_{r_1}}$上，我们得到$u$不恒为零。那么根据强极值原理得到$u|_A > 0$成立，这与$u|_{A_r} \equiv 0$矛盾。

(3) 若 $\mu > 1/4$，我们构造 $v_\varepsilon(\boldsymbol{x}) = \varphi(\boldsymbol{x})|\boldsymbol{x}|^{-\frac{1}{2}+\varepsilon}$，其中 $\varphi \in C_c^\infty(B)$ 且在 $B_{1/2}$ 中恒为1，$0 < \varepsilon \ll 1$. 为了简便我们不妨假设 $\varphi$ 也是径向函数。计算可得 $\nabla v_\varepsilon|_{B_{1/2}} = (\varepsilon - \frac{1}{2})|\boldsymbol{x}|^{-\frac{3}{2}+\varepsilon}\frac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|}$. 于是

$$\int_{B_{1/2}} |\nabla v_\varepsilon|^2 \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = 4\pi \left(\varepsilon - \frac{1}{2}\right)^2 \int_0^{1/2} r^{-1+2\varepsilon} \,\mathrm{d}r, \quad \int_{B_{1/2}} \frac{w_\varepsilon^2}{|\boldsymbol{x}|^2} \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = 4\pi \int_0^{1/2} r^{-1+2\varepsilon} \,\mathrm{d}r.$$

而

$$\int_0^{1/2} r^{-1+2\varepsilon} \,\mathrm{d}r = (1/2)^{2\varepsilon}/(2\varepsilon) \sim 1/(2\varepsilon),$$

所以

$$I[v_\varepsilon] = 4\pi \underbrace{\left[\left(\varepsilon - \frac{1}{2}\right)^2 - \mu\right]}_{<0} \underbrace{\int_0^{1/2} r^{-1+2\varepsilon} \,\mathrm{d}r}_{\sim 1/(2\varepsilon)} + O(1) \to -\infty, \quad \text{as } \varepsilon \to 0_+.$$

最终将序列归一化即可，实际上可以验证 $\|v_\varepsilon\|_{L^2(B)}$ 一致有界。 □

**试题 5B** (40分，含15分附加题). 设$B\subset\mathbb{R}^3$是单位开球，给定非负函数 $f\in C(\overline{B})$. 对常数 $\varepsilon\in(0,1)$，考虑如下奇异摄动问题

$$-\varepsilon\Delta u_\varepsilon+\frac{1}{\varepsilon}(u_\varepsilon^3-u_\varepsilon)=f\quad\text{in } B,\quad u_\varepsilon=1\quad\text{on }\partial B.$$

已知对任意给定的 $\varepsilon\in(0,1)$，该方程存在唯一的**非负**古典解 $u_\varepsilon\in C^2(B)\cap C(\overline{B})$.

(1) (5分) 证明：对任意$\boldsymbol{x}\in B$成立不等式 $1\leqslant u_\varepsilon(\boldsymbol{x})\leqslant 1+\frac{\varepsilon}{2}\|f\|_{L^\infty(B)}$.

(2) (20分) 令 $w_\varepsilon(\boldsymbol{x}):=\varepsilon^{-1}(u_\varepsilon(\boldsymbol{x})-1)$. 若再假设 $f\in H_0^1(B)$，证明：存在不依赖$\varepsilon$的常数$C>0$使得

$$\|\nabla u_\varepsilon\|_{L^2(B)}\leqslant C\varepsilon,\qquad \|2w_\varepsilon-f\|_{L^2(B)}\leqslant C\varepsilon.$$

(3) (15分，附加题) 若只假设 $f\in H^1(B)\cap C(\overline{B})$，证明如下结论：

(3a) (12分) 存在不依赖$\varepsilon$的常数$C>0$使得外法向导数 $|\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial N}|\leqslant C/\varepsilon$ 在边界 $\partial B$ 恒成立。

(3b) (3分) 存在不依赖$\varepsilon$的常数$C'>0$使得$\|\nabla u_\varepsilon\|_{L^2(B)}\leqslant C'\sqrt{\varepsilon}$成立。

提示：(2) 思考在$w_\varepsilon$满足的方程两边乘以怎样的函数再积分，可以做到关于$\varepsilon$一致的估计；(3a) 思考怎样通过 $L_\varepsilon:=-\varepsilon^2\Delta+2I$ 构造合适的“闸函数”$b_\varepsilon$，使得其在边界上的外法向导数能在边界上卡住$|\nabla w_\varepsilon|$.

注：(3b)亦有完全不依赖(3a)的证法，用其他方法正确证明(3b)也可得15分。

**解析.** 本题是一个半线性椭圆方程的奇异摄动问题，非附加部分是改编自作业1的第8题（线性方程的奇异摄动）。第(1)问是弱极值原理证明的翻版（因为在证明结论之前不知道零阶项系数正负），第(2)问第一部分需要注意乘以$w_\varepsilon$会导致有奇性，乘以$\Delta w_\varepsilon$才合适，第二部分可以使用和作业题（作业1第8题）一样的乘子。关于附加题，实际上体现的是$\varepsilon\to 0_+$时出现了“弱边界层”效应。如果我们从(2)的证明出发，很快会发现需要$|\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial N}|\leqslant C/\varepsilon$这样的界，而这可以通过构造“闸函数”的方法来证明，也就是直接使用作业2的第7题（习题2.6.2，Evans习题6.9）即可，“闸函数”的具体构造方法在作业2第8题答案后面的注记里面有所体现。

这里“弱边界层”是指$u_\varepsilon$在极限意义下保持边值，但是其梯度产生爆破，而且(3)的$O(\sqrt{\varepsilon})$收敛速率是最佳的，解一维情况或者高维径向解的ODE硬算即可。本来还想出举反例 $\|\nabla u_\varepsilon\|_{L^\infty}\to\infty$ 的，但是想想(3a)的构造已经很难了：一开始出的是一般有界区域，而距离函数不是整体$C^2$的，此时要么在边界附近的一个管状邻域内构造局部闸函数，要么在内部用一个常值函数和距离函数在边界附近拼起来构成整体闸函数，或者使用 $(-\Delta)$ 的第一特征函数替代 $d(\boldsymbol{x})$；虽然证法还是一模一样，但这样的话就涉及太多不是PDE的东西了。

证明. (1) 先证下界。设 $m:=\min\limits_{\overline{B}}u_\varepsilon$. 若最小值取在边界上，则由边界条件 $u_\varepsilon=1$ 可知 $m=1$. 若最小值取

在内点 $\boldsymbol{x}_0 \in B$，则 $\Delta u_\varepsilon(x_0) \geqslant 0$. 代入方程得到

$$f(\boldsymbol{x}_0) = -\varepsilon \Delta u_\varepsilon(\boldsymbol{x}_0) + \frac{1}{\varepsilon}\big(m^3 - m\big) \leqslant \frac{1}{\varepsilon}\big(m^3 - m\big).$$

若 $m < 1$，则**由非负性得知** $m^3 - m < 0$，从而右端小于 0，这与 $f(\boldsymbol{x}_0) \geqslant 0$ 矛盾。因此 $u_\varepsilon \geqslant 1$ in $\overline{B}$.

再证上界，记$K := 1 + \frac{\varepsilon}{2}M, M := \|f\|_{L^\infty(B)}$. 反设存在点使 $u_\varepsilon > K$，设 $\boldsymbol{x}_1 \in B$ 是 $u_\varepsilon$ 在 $\overline{B}$ 上的最大点，且 $u_\varepsilon(\boldsymbol{x}_1) > K$. 由于边界上 $u_\varepsilon = 1 < K$，故 $\boldsymbol{x}_1 \in B$. 于是 $\Delta u_\varepsilon(\boldsymbol{x}_1) \leqslant 0$. 代入方程可得

$$f(\boldsymbol{x}_1) = -\varepsilon \Delta u_\varepsilon(\boldsymbol{x}_1) + \frac{1}{\varepsilon}\big(u_\varepsilon(\boldsymbol{x}_1)^3 - u_\varepsilon(\boldsymbol{x}_1)\big) \geqslant \frac{1}{\varepsilon}\big(u_\varepsilon(\boldsymbol{x}_1)^3 - u_\varepsilon(\boldsymbol{x}_1)\big).$$

而由 $u_\varepsilon(\boldsymbol{x}_1) \geqslant 1$，对任意 $s \geqslant 1$ 有 $s^3 - s = s(s-1)(s+1) \geqslant 2(s-1)$. 故

$$f(\boldsymbol{x}_1) \geqslant \frac{2}{\varepsilon}\big(u_\varepsilon(\boldsymbol{x}_1) - 1\big) > \frac{2}{\varepsilon} \cdot \frac{\varepsilon}{2}M = M,$$

这与 $f(\boldsymbol{x}_1) \leqslant M$ 矛盾。

(2) 由 $u_\varepsilon = 1 + \varepsilon w_\varepsilon$ 代回原方程得

$$-\varepsilon^2 \Delta w_\varepsilon + 2w_\varepsilon + 3\varepsilon w_\varepsilon^2 + \varepsilon^2 w_\varepsilon^3 = f \quad \text{in } B, \qquad w_\varepsilon = 0 \quad \text{on } \partial B.$$

由 (1) 得 $0 \leqslant w_\varepsilon(x) \leqslant \frac{1}{2}M$ 在 $B$ 中恒成立。

**证法一：利用** $2w_\varepsilon - f$**作为乘子。**把方程改写为$-\varepsilon^2\Delta w_\varepsilon + (2w_\varepsilon - f) + (3\varepsilon w_\varepsilon^2 + \varepsilon^2 w_\varepsilon^3) = 0$. 注意此时 $2w_\varepsilon - f \in H_0^1(B)$，在下面分部积分过程中不产生额外边界项。方程现在可以写作 $-\varepsilon^2\Delta w_\varepsilon + (2w_\varepsilon - f) = -3\varepsilon w_\varepsilon^2 - \varepsilon^2 w_\varepsilon^3$. 现在取 $2w_\varepsilon - f$ 为乘子，两边积分后可得

$$\int_B (-\varepsilon^2 \Delta w_\varepsilon)(2w_\varepsilon - f)dx + \int_B (2w_\varepsilon - f)^2 dx + \int_B (3\varepsilon w_\varepsilon^2 + \varepsilon^2 w_\varepsilon^3)(2w_\varepsilon - f)dx = 0.$$

对第一项作分部积分，边界项消失，得到下式

$$\begin{aligned}
\int_B (-\varepsilon^2 \Delta w_\varepsilon)(2w_\varepsilon - f)dx = \varepsilon^2 \int_B \nabla w_\varepsilon \cdot \nabla(2w_\varepsilon - f)dx &= 2\varepsilon^2 \int_B |\nabla w_\varepsilon|^2 dx - \varepsilon^2 \int_B \nabla w_\varepsilon \cdot \nabla f dx \\
&\geqslant 2\varepsilon^2 \|\nabla w_\varepsilon\|_{L^2(B)}^2 - \frac{1}{2}\varepsilon^2 \|\nabla w_\varepsilon\|_{L^2(B)}^2 - \frac{1}{2}\varepsilon^2 \|\nabla f\|_{L^2(B)}^2 \\
&= \frac{3}{2}\varepsilon^2 \|\nabla w_\varepsilon\|_{L^2(B)}^2 - \frac{1}{2}\varepsilon^2 \|\nabla f\|_{L^2(B)}^2
\end{aligned}$$

而另一方面利用$0 \leqslant w_\varepsilon \leqslant M/2$得到

$$\left| \int_B (3\varepsilon w_\varepsilon^2 + \varepsilon^2 w_\varepsilon^3)(2w_\varepsilon - f)dx \right| \leqslant C_M \varepsilon^2 + \frac{1}{2}\|2w_\varepsilon - f\|_{L^2(B)}^2.$$

以上两个不等式代入能量恒等式得到

$$\frac{3}{2}\varepsilon^2\|\nabla w_\varepsilon\|_{L^2(B)}^2+\frac{1}{2}\|2w_\varepsilon-f\|_{L^2(B)}^2\le\frac{1}{2}\varepsilon^2\|\nabla f\|_{L^2(B)}^2+C\varepsilon^2.$$

因此这直接得到 $\|2w_\varepsilon-f\|_{L^2(B)}\lesssim\varepsilon$ 以及 $\|\nabla w_\varepsilon\|_{L^2(B)}\lesssim 1\ \Rightarrow\ \|\nabla u_\varepsilon\|_{L^2(B)}\lesssim\varepsilon$.

**证法二：利用 $w_\varepsilon$作为乘子。这可能是大多数同学的第一反应，但是如果你用过这个方法去算作业1第8题的话，就会发现那道题也可以这么做，但是要在合适的地方代入一次方程，本质上和证法一是一样的。**

记非线性项 $R_\varepsilon:=3\varepsilon w_\varepsilon^2+\varepsilon^2w_\varepsilon^3$. 则方程为 $-\varepsilon^2\Delta w_\varepsilon+(2w_\varepsilon-f)+R_\varepsilon=0$. 由第(1)问已经得到 $w_\varepsilon$ 在 $L^\infty(B)$ 中关于$\varepsilon$ 一致有界，即 $0\leqslant w_\varepsilon\leqslant C_f$. 因此

$$\|R_\varepsilon\|_{L^2(B)}\leqslant 3\varepsilon\|w_\varepsilon\|_{L^\infty(B)}^2|B|^{1/2}+\varepsilon^2\|w_\varepsilon\|_{L^\infty(B)}^3|B|^{1/2}\leqslant C_f\varepsilon.$$

方程两边乘以$w_\varepsilon$，分部积分可得

$$\varepsilon^2\int_B|\nabla w_\varepsilon|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}+\int_B(2w_\varepsilon-f)w_\varepsilon\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}+\int_B R_\varepsilon w_\varepsilon\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}=0.$$

注意 $w_\varepsilon=\frac{1}{2}(2w_\varepsilon-f)+\frac{1}{2}f$, 所以

$$\int_B(2w_\varepsilon-f)w_\varepsilon\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}=\frac{1}{2}\|2w_\varepsilon-f\|_{L^2(B)}^2+\frac{1}{2}\int_B f(2w_\varepsilon-f)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

**此时将$2w_\varepsilon-f=\varepsilon^2\Delta w_\varepsilon-R_\varepsilon$代入上式第二项，分部积分得到（注意这里要用$f\in H_0^1$）**得到

$$\int_B f(2w_\varepsilon-f)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}=-\varepsilon^2\int_B\nabla w_\varepsilon\cdot\nabla f\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}-\int_B R_\varepsilon f\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

于是现在得到

$$\varepsilon^2\|\nabla w\|_{L^2(B)}^2-\frac{\varepsilon^2}{2}\int_B\nabla w\cdot\nabla f\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}+\frac{1}{2}\|2w-f\|_{L^2(B)}^2+\frac{1}{2}\int_B R_\varepsilon(2w_\varepsilon-f)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}=0.$$

余下步骤和证法一是一样的

**证法三：利用$\Delta w_\varepsilon$作为乘子。**方程两边乘 $-\Delta w_\varepsilon$ 分部积分可得

$$\varepsilon^2\|\Delta w_\varepsilon\|_{L^2(B)}^2+2\|\nabla w_\varepsilon\|_{L^2(B)}^2+6\varepsilon\int_B w_\varepsilon|\nabla w_\varepsilon|^2+3\varepsilon^2\int_B w_\varepsilon^2|\nabla w_\varepsilon|^2=\int_B\nabla f\cdot\nabla w_\varepsilon.$$

舍去左边非负项得到 $2\|\nabla w_\varepsilon\|_{L^2(B)}^2\leqslant\|\nabla f\|_{L^2(B)}\|\nabla w_\varepsilon\|_{L^2(B)}$，这说明 $\|\nabla w_\varepsilon\|_{L^2(B)}\leqslant\frac{1}{2}\|\nabla f\|_{L^2(B)}$, 进而

$$\|\nabla u_\varepsilon\|_{L^2(B)}=\varepsilon\|\nabla w_\varepsilon\|_{L^2(B)}\leqslant\frac{\varepsilon}{2}\|\nabla f\|_{L^2(B)}.$$

再证明 $\|2w_\varepsilon-f\|_{L^2(B)}\leqslant C\varepsilon$. 由上面的计算同时得到 $\varepsilon\|\Delta w_\varepsilon\|_{L^2(B)}\leqslant C$ 一致有界。现在估计 $\|2w_\varepsilon-f\|_{L^2(B)}$。

注意$w_\varepsilon$的方程可写成 $2w_\varepsilon - f = \varepsilon^2\Delta w_\varepsilon - 3\varepsilon w_\varepsilon^2 - \varepsilon^2 w_\varepsilon^3$. 于是由 $\varepsilon\|\Delta w_\varepsilon\|_{L^2(B)} \leqslant C$ 以及 $0 \leqslant w_\varepsilon \leqslant M/2$ 得到

$$\|2w_\varepsilon - f\|_{L^2(B)} \leqslant \varepsilon^2\|\Delta w_\varepsilon\|_{L^2(B)} + 3\varepsilon\|w_\varepsilon^2\|_{L^2(B)} + \varepsilon^2\|w_\varepsilon^3\|_{L^2(B)} \leqslant C\varepsilon + \frac{3M^2}{4}\varepsilon|B|^{1/2} + \frac{M^3}{8}\varepsilon|B|^{1/2} \leqslant C'\varepsilon.$$

(3) 我们先**证明(3a) $\Rightarrow$ (3b)**. 仿照 (2) 的计算得到

$$2\|\nabla w_\varepsilon\|_{L^2}^2 \leqslant \int_B \nabla f \cdot \nabla w_\varepsilon \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} - \int_{\partial B} f\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial N} dS_{\boldsymbol{x}}.$$

右边第一项有上界 $\|\nabla w_\varepsilon\|_{L^2}^2 + (1/4)\|\nabla f\|_{L^2}^2$. 接下来**必须得到形如 $|\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial N}| \leqslant C'/\varepsilon$ on $\partial B$ 的逐点估计，这需要通过构造“闸函数”证得。**如果该法向导数估计成立，那么利用 $f \geqslant 0$ 得到

$$-\int_{\partial B} f\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial N}\,\mathrm{d}S_{\boldsymbol{x}} \leqslant C'\varepsilon^{-1}\int_{\partial B} f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}S_{\boldsymbol{x}} \leqslant 4\pi C'M\varepsilon^{-1},$$

即得结论。

**证明(3a)**. 我们令 $L_\varepsilon := -\varepsilon^2\Delta + 2I$，则原方程化作 $L_\varepsilon w_\varepsilon = f - (3\varepsilon w_\varepsilon^2 + \varepsilon^3 w_\varepsilon^3) := \tilde{f}_\varepsilon(\boldsymbol{x})$. 而右端项具有一致上界 $\|\tilde{f}_\varepsilon\|_{L^\infty(B)} \leqslant \frac{M}{2} + C\varepsilon$. 由作业2的第7题（讲义习题2.6.2、Evans PDE习题6.9），**如果我们能构造闸函数$b_\varepsilon$**满足

$$L_\varepsilon b_\varepsilon := -\varepsilon^2\Delta b_\varepsilon + 2b_\varepsilon \geqslant 1 \text{ in } B, \quad b_\varepsilon|_{\partial B} = 0, \quad \text{以及} \quad \left|\frac{\partial b_\varepsilon}{\partial N}\right| \leqslant C/\varepsilon \text{ on } \partial B.$$

那么就有

$$\forall \boldsymbol{x} \in \partial B, \quad |\nabla w_\varepsilon(\boldsymbol{x})| \leqslant \|\tilde{f}_\varepsilon\|_{L^\infty(B)}\left|\frac{\partial b_\varepsilon}{\partial N}(\boldsymbol{x})\right| \leqslant C/\varepsilon,$$

即为所求。

闸函数可以通过构造指数型的边界层误差得到。固定$\varepsilon$，我们令$b_\varepsilon(\boldsymbol{x}) = 1 - e^{-\frac{\lambda\rho(\boldsymbol{x})}{\varepsilon}}$，其中 $\rho(\boldsymbol{x}) = (1 - |\boldsymbol{x}|^2)/2$，则直接计算得出

$$\nabla b_\varepsilon(\boldsymbol{x}) = -\frac{\lambda}{\varepsilon}e^{-\frac{\lambda}{\varepsilon}\rho}\boldsymbol{x}, \quad \Delta b_\varepsilon(\boldsymbol{x}) = -\frac{\lambda}{\varepsilon}e^{-\frac{\lambda}{\varepsilon}\rho}\left(\frac{\lambda}{\varepsilon}|\boldsymbol{x}|^2 + 3\right).$$

进而

$$L_\varepsilon b_\varepsilon = 2 + e^{-\frac{\lambda(1-|\boldsymbol{x}|^2)}{2\varepsilon}}\left(\lambda^2|\boldsymbol{x}|^2 + 3\lambda\varepsilon - 2\right).$$

当 $\frac{1}{2} \leqslant |\boldsymbol{x}| \leqslant 1$时，取$\lambda$充分大（例如$\lambda = 3$）就必有上式右边 $\geqslant 1$. 而当 $0 \leqslant |\boldsymbol{x}| \leqslant \frac{1}{2}$ 时，尽管 $|\boldsymbol{x}|$ 小，但是$\rho(\boldsymbol{x}) \geqslant 3/8$, 于是 $L_\varepsilon b_\varepsilon(\boldsymbol{x}) \geqslant 2 - 2e^{-\frac{3\lambda}{8\varepsilon}} \geqslant 2 - 2e^{-9/8} > 1$. 因此我们证明了 $L_\varepsilon b_\varepsilon \geqslant 1$ in $B$ 在 $\lambda > 0$ 充分大且 $\varepsilon$ 充分小时恒成立。

注：$\rho(\boldsymbol{x})$取法不唯一，其实把$\rho$取成$(-\Delta)$算子的第一特征函数（取正值的）也可以。 $\square$