中国科学技术大学
2025–2026学年第二学期现代偏微分方程期末考试试题解析

考试时间：2026年6月16日 09:50–12:10　　开课院系：数学科学学院

试题 1 (25分)**.** 设$f \in L^2(U), u_m = \sum_{k=1}^{m} d_m^k w_k$ 满足下式

$$\int_U \nabla u_m \cdot \nabla w_k \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_U f\, w_k \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}, \quad \forall 1 \leqslant k \leqslant m,$$

其中 $\{w_k\}$ 是 $H_0^1(U)$ 的一组标准正交基。证明：$\{u_m\}$ 存在子列在$H_0^1(U)$中弱收敛到u，其中u是方程$-\Delta u = f \text{ in } U, u|_{\partial U} = 0$的弱解。

解析. 本题是作业原题（作业三的第3题，Evans第7章习题），即为Poisson方程的Galerkin逼近解法。

证明. 在题给条件式两端同乘 d_m^k 并对 k 从 1 到 m 求和，利用 $u_m = \sum_{k=1}^{m} d_m^k w_k$ 可得$\int_U |\nabla u_m|^2 \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_U f u_m \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$. 由 Cauchy–Schwarz 不等式和 Poincaré 不等式得到

$$\|\nabla u_m\|_{L^2}^2 \leqslant \|f\|_{L^2}\|u_m\|_{L^2} \leqslant C\|f\|_{L^2}\|\nabla u_m\|_{L^2} \;\Rightarrow\; \|\nabla u_m\|_{L^2} \leqslant C\|f\|_{L^2}.$$

这表明 $\{u_m\}$ 在 $H_0^1(U)$ 中一致有界。由弱紧性得知必存在子列（仍记为 $\{u_m\}$）和 $u \in H_0^1(U)$，使得 $u_m \rightharpoonup u$ 在 $H_0^1(U)$ 中弱收敛。

接下来证明 u 是弱解。对任意固定的 $v \in H_0^1(U)$，由于 $\{w_k\}$ 是标准正交基，存在由前 m 个基底构成的组合 $v_m = \sum_{k=1}^{m} c_k w_k$，使得当 $m \to \infty$ 时 v_m 在 H_0^1 中强收敛到 v。对任意给定的 m有

$$\int_U \nabla u_m \cdot \nabla v_m \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_U f v_m \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

令 $m \to \infty$，由于 $u_m \rightharpoonup u$ 在 $H_0^1(U)$ 中弱收敛，且 $v_m \to v$ 在 $H_0^1(U)$ 中强收敛，所以左右两端内积均收敛

$$\int_U \nabla u \cdot \nabla v \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_U f v \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

□

试题 2 (25分)**.** 设u是如下热方程的光滑解

$$\partial_t u - \Delta u = 0 \text{ in } (0,\infty)\times U, \quad u = 0 \text{ on } [0,\infty)\times\partial U, \quad u = g \in C^1(\overline{U}) \text{ on } \{t=0\}\times\bar{U}.$$

(1) (15分) 证明：存在仅依赖区域 U 的常数 $C>0$，使得对任意 $t>0$ 成立不等式 $\int_U |u(t,\boldsymbol{x})|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \leqslant e^{-Ct}\int_U |g(\boldsymbol{x})|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$. 常数$C$的最大值是多少？$g$取成什么函数时能够使得$C$达到最大值？

(2) (10分) 证明或否定：$\lim\limits_{t\to+\infty}\sup\limits_{\boldsymbol{x}\in\overline{U}}|u(t,\boldsymbol{x})|=0$.

解析. 本题是作业原题（作业三的第4题），即证明有界区域、零边值热方程的能量和逐点指数衰减。需注意的是本题考虑的是有界区域情况，如果要使用热半群的衰减估计，则需要给出证明。

证明. (1) 方程乘 u 然后分部积分可得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_U u^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}=\int_U u\Delta u\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}=-\int_U |\nabla u|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

据主特征值 λ_1 的变分原理知 $\int_U |\nabla u|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\geqslant \lambda_1\int_U u^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$。代入上式得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u(t)\|_{L^2}^2\leqslant -2\lambda_1\|u(t)\|_{L^2}^2$$

由 Grönwall 不等式解得$\|u(t)\|_{L^2}^2\leqslant e^{-2\lambda_1 t}\|g\|_{L^2}^2 \;\Rightarrow\; \|u(t,\cdot)\|_{L^2(U)}\leqslant e^{-\lambda_1 t}\|g\|_{L^2(U)}$. 当 $g=w_1$ 时 (即$(-\Delta)$的第一特征函数) 上式可以取等号，所以C的最大值是$2\lambda_1$.

(2) 设主特征值 λ_1 对应的正特征函数为 $w_1(\boldsymbol{x})$，即 $-\Delta w_1=\lambda_1 w_1$，且在 U 内 $w_1>0$。考察函数 $v(t,\boldsymbol{x})=Ce^{-\lambda_1 t}w_1(\boldsymbol{x})$。直接计算可知 $\partial_t v-\Delta v=-C\lambda_1 e^{-\lambda_1 t}w_1-e^{-\lambda_1 t}(-C\lambda_1 w_1)=0$，即 v 也是热方程的光滑解。由于 $g\in C^1(\overline{U})$ 且 $g|_{\partial U}=0$，由讲义的问题2.6.2得知：存在常数 $C>0$，使得在 $\overline{U}$ 上恒有 $-Cw_1(\boldsymbol{x})\leqslant g(\boldsymbol{x})\leqslant Cw_1(\boldsymbol{x})$. 这即是初始时刻 $t=0$ 时的比较条件. 由于 u 和 $\pm v$ 在边界上均为零，由抛物方程弱极值原理（比较原理），对任意 $t>0$ 都有$-v(t,\boldsymbol{x})\leqslant u(t,\boldsymbol{x})\leqslant v(t,\boldsymbol{x})$. 因此$|u(t,\boldsymbol{x})|\leqslant Ce^{-\lambda_1 t}w_1(\boldsymbol{x})\leqslant C'e^{-\lambda_1 t}$. □

试题 3 (20分). 设空间维数$d=3$, 函数$u\in C([0,T];H_0^1(U)),\partial_t u\in C([0,T];L^2(U))$是如下带阻尼的散焦波动方程的局部解:

$$\partial_t^2 u-\Delta u+\partial_t u+u^5=0\ ((t,\boldsymbol{x})\in(0,T)\times U),\quad u|_{\partial U}=0,\quad (u,\partial_t u)|_{t=0}=(\varphi,\psi)\in H_0^1(U)\times L^2(U).$$

已知：若方程解的极大存在时间$T_*<\infty$，则$\limsup\limits_{t\nearrow T_*}\left[\|\nabla u(t,\cdot)\|_{L^2}+\|\partial_t u(t,\cdot)\|_{L^2}\right]=+\infty$.

(1) (8分) 证明：能量函数 $E_0(t)=\frac{1}{2}\int_U(\partial_t u)^2+|\nabla u|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}+\frac{1}{6}\int_U u^6\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ 关于 t 单调递减，进而该局部解可以延拓为整体解。

(2) (12分) 证明存在常数$C,a>0$使得$E_0(t)\leqslant CE_0(0)e^{-at}$.

提示：(2)考虑先对$E_\varepsilon(t):=E_0(t)+\varepsilon\int_U u\partial_t u\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$做能量估计，然后思考如何做回$E_0$的估计。

解析. 本题(2)改编自作业五的第1题，讨论阻尼波方程的指数衰减估计，方程里面的非线性项 u^5 实际上并没有起本质作用，提示所述的方法是处理部分耗散双曲系统能量估计的经典方法之一。本题的(1)则是爆破准则与L^2能量估计的简单应用。

证明. (1) 将方程乘以 $\partial_t u$ 并在 U 上积分。由于 $u|_{\partial U}=0$，分部积分可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{1}{2}\int_U(\partial_t u)^2+|\nabla u|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}+\frac{1}{6}\int_U u^6\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right]+\int_U(\partial_t u)^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}=0\ \Rightarrow\ E_0'(t)=-\|\partial_t u(t)\|_{L^2(U)}^2\leqslant 0.$$

因此 $E_0(t)$ 单调递减。而$\|\nabla u(t)\|_{L^2}^2+\|\partial_t u(t)\|_{L^2}^2\leqslant 2E_0(t)\leqslant 2E_0(0)$，若极大存在时间 $T_*<\infty$，则上述一致界与题设的爆破准则矛盾。因此解可以延拓为整体解。

(2) 令$E_\varepsilon(t):=E_0(t)+\varepsilon\int_U u\partial_t u\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$，其中 $0<\varepsilon\ll 1$ 稍后选取。由 Poincaré 不等式和 Young 不等式，存在常数 $C_P>0$ 使得下式成立

$$\left|\int_U u\partial_t u\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right|\leqslant\frac{\delta}{2}\|\partial_t u\|_{L^2}^2+\frac{C_P}{2\delta}\|\nabla u\|_{L^2}^2,$$

因此取 $\varepsilon>0$ 足够小就可得 E_ε 与 E_0 等价，即存在 $c_0,C_0>0$ 使得 $c_0E_0(t)\leqslant E_\varepsilon(t)\leqslant C_0E_0(t)$.

下面计算交叉项的导数：

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_U u\partial_t u\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}&=\int_U(\partial_t u)^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}+\int_U u\partial_t^2 u\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}=\int_U(\partial_t u)^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}+\int_U u(\Delta u-\partial_t u-u^5)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\\&=\|\partial_t u\|_{L^2}^2-\|\nabla u\|_{L^2}^2-\int_U u\partial_t u\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}-\|u\|_{L^6}^6.\end{aligned}$$

所以 $E_\varepsilon'(t)=-\|\partial_t u\|_{L^2}^2+\varepsilon\|\partial_t u\|_{L^2}^2-\varepsilon\|\nabla u\|_{L^2}^2-\varepsilon\|u\|_{L^6}^6-\varepsilon\int_U u\partial_t u\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$，再将 $\int_U u\partial_t u\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ 的估计代进来得到

$$E_\varepsilon'(t)\leqslant-\left(1-\varepsilon-\frac{\varepsilon\delta}{2}\right)\|\partial_t u\|_{L^2}^2-\varepsilon\left(1-\frac{C_P}{2\delta}\right)\|\nabla u\|_{L^2}^2-\varepsilon\int_U u^6\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

先固定 $\delta>C_P/2$，再取 $\varepsilon>0$ 足够小，则存在 $a_0>0$ 使得

$$E_\varepsilon'(t)\leqslant -a_0\left(\|\partial_t u\|_{L^2}^2+\|\nabla u\|_{L^2}^2+\|u\|_{L^6}^6\right)\leqslant -a_1E_0(t)\leqslant -aE_\varepsilon(t).$$

由 Gronwall 不等式得到 $E_\varepsilon(t)\leqslant E_\varepsilon(0)e^{-at}$，再利用 E_ε 与 E_0 的等价性就得到 $E_0(t)\leqslant CE_0(0)e^{-at}$. □

请在试题4A和试题4B之中选取一题作答。

试题 4A (20分). 设 $B\subset\mathbb{R}^3$ 是单位球。问：方程 $-\Delta u=u^5$ $(\boldsymbol{x}\in B)$, $u|_{\partial B}=0$ 是否存在不恒为零的非负解$u\in C^2(\overline{B})$？证明你的结论。

提示：从该方程能得到关于 $\frac{\partial u}{\partial N}|_{\partial B}$ 的什么信息？本题若使用Pohozaev恒等式则必须详细推导。

解析. 本题是Pohozaev恒等式的直接应用，虽然$d = 3$时$p = 5$是临界指标，但是Pohozaev恒等式表明$\frac{\partial u}{\partial N}|_{\partial B} \equiv 0$，再由强极值原理就得到了与Hopf引理矛盾的地方。需注意，如果把这道题的区域换成$\mathbb{R}^d$，那么结论是变成“存在”，这个解被称作 Talenti bubble.

证明. 如果存在这样的 u，那么方程两边 u 并积分得到能量估计 $\int_B |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_B u^6 \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$. 下面推导 Pohozaev 恒等式，方程两边同时乘以 $\boldsymbol{x} \cdot \nabla u$ 并在 B 上积分，得到

$$\int_B (-\Delta u)(\boldsymbol{x} \cdot \nabla u) \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_B u^5 (\boldsymbol{x} \cdot \nabla u) \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

上式左边记为A, 右边记为B. 左边分部积分得到

$$A = \int_B (\partial_i u)\partial_i (x_j \partial_j u) \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} - \int_{\partial B} (\partial_i u) N_i x_j (\partial_j u) \,\mathrm{d}S_{\boldsymbol{x}} =: A_1 + A_2.$$

然后计算A_1，直接拆括号得到

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_B (\partial_i u)[\delta^{ij}(\partial_j u) + x_j(\partial_i \partial_j u)] \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_B |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \int_B \partial_j \left(\frac{|\nabla u|^2}{2}\right) x_j \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \\ &= \left(1 - \frac{3}{2}\right) \int_B |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \int_{\partial Bb} \frac{|\nabla u|^2}{2} (N(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{x}) \,\mathrm{d}S_{\boldsymbol{x}}. \end{aligned}$$

现在我们来处理边界项，因为 $u|_{\partial B} = 0$，所以$\forall \boldsymbol{x} \in \partial B$，梯度向量 $\nabla u(\boldsymbol{x})$ 必定平行于法向量 $N(\boldsymbol{x})$（因为 $u|_{\partial B} = 0$ 蕴含 u 在边界上的切向导数为零），因此 $\nabla u(\boldsymbol{x}) = \pm |\nabla u(\boldsymbol{x})| N(\boldsymbol{x})$。另一方面因为$B$是单位球，所以$\partial B$上有$N(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$，从而 $A_2 = -\int_{\partial B} |\nabla u|^2 |\boldsymbol{x}|^2 \,\mathrm{d}S_{\boldsymbol{x}}$.

上述各式相加，我们得到

$$A = -\frac{1}{2}\int_B |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} - \frac{1}{2}\int_{\partial B} |\nabla u|^2 |\boldsymbol{x}|^2 \,\mathrm{d}S_{\boldsymbol{x}} = -\frac{1}{2}\int_B |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} - \frac{1}{2}\int_{\partial B} \left|\frac{\partial u}{\partial N}\right|^2 |\boldsymbol{x}|^2 \,\mathrm{d}S_{\boldsymbol{x}}$$

接下来我们再计算B, 分部积分得到

$$B := \int_B u^5 x_j (\partial_j u) \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_B \partial_j \left(\frac{u^6}{6}\right) x_j \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = -\frac{1}{2}\int_B u^6 \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

而$A = B$，所以现在得到如下 Pohozaev 恒等式

$$\frac{1}{2}\int_B |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \frac{1}{2}\int_{\partial B} \left|\frac{\partial u}{\partial N}\right|^2 |\boldsymbol{x}|^2 \,\mathrm{d}S_{\boldsymbol{x}} = \frac{1}{2}\int_B u^6 \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

再结合能量估计 $\int_B |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_B u^6 \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ 我们得到 $\frac{\partial u}{\partial N}|_{\partial B} \equiv 0$。但现在 $u \geqslant 0$ 且不恒为零，并满足 $-\Delta u = u^5 \geqslant 0 \text{ in } B$，据强极值原理得到 $u > 0 \text{ in } B$ （否则 u 在内部达到最小值，迫使 u 为常数）。现在再由 Hopf 引理，单位球边界上应有 $\frac{\partial u}{\partial N}|_{\partial B} < 0$，矛盾。 □

试题 4B (20分). 设正整数$m \geqslant 1, d \geqslant 2$, 定义各向异性Sobolev空间$H^m_*(\mathbb{R}^d_+), H^m_{**}(\mathbb{R}^d_+)$如下

$$H^m_*(\mathbb{R}^d_+) := \Big\{ f \in L^2(\mathbb{R}^d_+) : \|f\|_{m,*} := \sum_{|\alpha|+2k\leqslant m} \|\bar{\partial}^\alpha \partial_d^k f\|_{L^2(\mathbb{R}^d_+)} < \infty \Big\}, \quad H^0_*(\mathbb{R}^d_+) = L^2(\mathbb{R}^d_+),$$

$$H^m_{**}(\mathbb{R}^d_+) := \Big\{ f \in H^m_*(\mathbb{R}^d_+) : \partial_d f \in H^{m-1}_*(\mathbb{R}^d_+), \text{即} \|f\|_{m,**} := \sum_{\substack{|\alpha|+2k\leqslant m+1 \\ |\alpha|\leqslant m}} \|\bar{\partial}^\alpha \partial_d^k f\|_{L^2(\mathbb{R}^d_+)} < \infty \Big\}.$$

其中 $\bar{\partial}^\alpha := \partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_{d-1}^{\alpha_{d-1}}$ 表示切向导数，$|\alpha| := \alpha_1 + \cdots + \alpha_{d-1}$. 记 Tr 是迹算子，且当$f \in C(\overline{\mathbb{R}^d_+}) \cap H^m_*(\mathbb{R}^d_+)$ 时 $\mathrm{Tr}\, f = f|_{\partial\mathbb{R}^d_+}$. 证明如下结论：

(1) (12分) 当 $m \geqslant 2$ 时，Tr: $H^m_*(\mathbb{R}^d_+) \to H^{m-1}(\partial\mathbb{R}^d_+)$ 是有界线性算子；

(2) (8分) 对任意正整数m，Tr: $H^m_{**}(\mathbb{R}^d_+) \to H^{m-\frac{1}{2}}(\partial\mathbb{R}^d_+)$ 是有界线性算子。

提示：思考为什么说迹定理的本质是Gauss–Green公式？本题可直接对光滑到边、且在无穷远处速降的函数证明，不需写逼近过程。

解析. 本题是各向异性Sobolev空间的迹定理，证明方法是照葫芦画瓢模仿H^s迹定理的证明。我们在课堂上已经多次强调，迹定理本质就是反过来用 Gauss–Green 公式（从边界返回内部）。这类各向异性空间在处理高维双曲守恒律边值问题的能量估计时起到了关键作用，尤其是对具有特征边界条件的情况，例如可压缩理想气体方程的固壁问题等等，使用标准 Sobolev 空间 H^m 有可能无法封闭能量估计（例如理想磁流体方程组带完美电导体边界条件，这也是原始物理模型之一要求的边界条件）。该类函数空间最早是在1982年由陈恕行院士提出使用，后来得到了广泛应用。

证明. (1) 设 $\beta \in \mathbb{N}^d$ 是多重指标，满足 $|\beta| \leqslant m-1$ 和 $\beta_d = 0$，并不妨设 $\beta_1 > 0$. 注意到 $\partial\mathbb{R}^d_+$ 的单位外法向量是 $N = (0, \cdots, 0, -1)$. 所以由Gauss–Green公式得到（注：$\mathbf{e}_1 = (1, 0 \cdots, 0) \in \mathbb{N}^d$）

$$\begin{aligned}\|\mathrm{Tr}\, f\|^2_{H^{m-1}(\partial\mathbb{R}^d_+)} &= \sum_{|\beta|\leqslant m-1} \int_{\partial\mathbb{R}^d_+} |\partial^\beta f(\boldsymbol{x}', 0)|^2 \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}' = -2 \sum_{|\beta|\leqslant m-1} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^{d-1}} (\partial_d \partial^\beta f)(\partial^\beta f) \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}' \,\mathrm{d}x_d \\ &= 2 \sum_{|\beta|\leqslant m-1} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^{d-1}} (\partial_d \partial^{\beta-\mathbf{e}_1} f)(\partial^{\beta+\mathbf{e}_1} f) \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}' \,\mathrm{d}x_d \leqslant 2\|f\|^2_{m,*}.\end{aligned}$$

(2) 由Plancherel恒等式再分部积分直接可以算得答案

$$\begin{aligned}&\|\mathrm{Tr}\, f\|^2_{H^{m-\frac{1}{2}}(\partial\mathbb{R}^d_+)} = \int_{\partial\mathbb{R}^d_+} \langle \boldsymbol{\xi}' \rangle^{2m-1} |\hat{f}(\boldsymbol{\xi}', 0)|^2 \,\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}' \\ =& -2\mathbf{Re} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \Big(\langle \boldsymbol{\xi}' \rangle^m \overline{\hat{f}(\boldsymbol{\xi}', x_d)} \Big) (\langle \boldsymbol{\xi}' \rangle^{m-1} \partial_{x_d} \hat{f}(\boldsymbol{\xi}', x_d)) \,\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}' \,\mathrm{d}x_d \\ =& -2 \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \langle \nabla' \rangle^m f \, \partial_{x_d} \langle \nabla' \rangle^{m-1} f \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}' \,\mathrm{d}x_d \leqslant 2\|f\|_{m,*} \|\partial_d f\|_{m-1,*}.\end{aligned}$$

□

请在试题5A和试题5B之中选取一题作答。

试题 5A (50分)**.** 记半空间 $\Omega=\{\boldsymbol{x}=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 : x_1>0\}$. 设$\mathbf{b}$为常值向量，$g\in C_c^\infty(\Omega)$，对参数$\varepsilon\in(0,1]$，考虑 $\mathbb{R}^2_+$ 上的黏性对流–扩散方程初边值问题：

$$\partial_t u^\varepsilon+\mathbf{b}\cdot\nabla u^\varepsilon-\varepsilon\Delta u^\varepsilon=0\,(t\in(0,T),\boldsymbol{x}\in\Omega),\ \ u^\varepsilon=0\,(t\in[0,T],\boldsymbol{x}\in\partial\Omega),\ \ u^\varepsilon(0,\boldsymbol{x})=g(\boldsymbol{x})\,(\boldsymbol{x}\in\overline{\Omega}).\ \ (P_\varepsilon)$$

已知对任意 $\varepsilon>0$，(P_ε)存在充分光滑的解 u^ε. 再设$u(t,\boldsymbol{x})=\tilde{g}(\boldsymbol{x}-t\mathbf{b})$为如下传输方程的一个光滑解

$$\partial_t u+\mathbf{b}\cdot\nabla u=0\quad(t\in(0,T),\boldsymbol{x}\in\Omega),\qquad u(0,\boldsymbol{x})=g(\boldsymbol{x})\quad(\boldsymbol{x}\in\overline{\Omega}),\qquad (P_0)$$

其中$\tilde{g}:=g\mathbf{1}_\Omega\in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$是$g$在$\mathbb{R}^2$上的零延拓。

(1) (15分) 设$\mathbf{b}=(1,0)$，证明如下结论：

(1a) (9分) 存在不依赖ε的常数$C>0$使得 $\sup\limits_{t\in[0,T]}\|u^\varepsilon(t,\cdot)\|_{H^1(\Omega)}\leqslant C$.

(1b) (6分) (P_0)的解满足 $u|_{\partial\Omega}=0$，且存在不依赖ε的常数$C>0$使得 $\sup\limits_{t\in[0,T]}\|u^\varepsilon(t,\cdot)-u(t,\cdot)\|_{L^2(\Omega)}\leqslant C\varepsilon$.

(2) (35分，附加题) 设$\mathbf{b}=(-1,0)$并记$a(t,x_2)=u(t,0,x_2)$. 已知存在 $t_0\in(0,T)$ 使得 $a(t_0,\cdot)$ 不恒为零。

(2a) (7分) 证明：$\sup\limits_{t\in[0,T]}\|u^\varepsilon(t,\cdot)\|_{H^1(\Omega)}$不再关于$\varepsilon$一致有界。

(2b) (14分) 证明：存在零阶校正 θ_0 使得逼近解 $u^\varepsilon_{\mathrm{app},0}(t,x_1,x_2):=u(t,x_1,x_2)+\theta_0(t,x_1/\varepsilon,x_2)$满足

$$u^\varepsilon_{\mathrm{app},0}(t,0,x_2)\equiv 0,\qquad \sup_{t\in[0,T]}\|u^\varepsilon(t,\cdot)-u^\varepsilon_{\mathrm{app},0}(t,\cdot)\|_{L^2(\Omega)}\leqslant C\sqrt{\varepsilon},$$

其中这个$C>0$不依赖ε.

(2c) (14分) 是否存在一阶逼近解$u^\varepsilon_{\mathrm{app},1}(t,x_1,x_2)$，它仅依赖$u$和(2b)中的零阶校正函数 θ_0 (及其导数) 而不依赖u^ε，并满足

$$u^\varepsilon_{\mathrm{app},1}(t,0,x_2)\equiv 0,\qquad \sup_{t\in[0,T]}\|u^\varepsilon(t,\cdot)-u^\varepsilon_{\mathrm{app},1}(t,\cdot)\|_{L^2(\Omega)}\leqslant C\varepsilon?$$

其中这个$C>0$不依赖ε. 证明你的结论。

提示：(2c) 仍然需要加入含有“快变量”$z:=x_1/\varepsilon$的一阶校正函数，思考该校正项的尺度关于 ε 应该有怎样的阶？

解析. 本题改编自作业三的第5题，原题是 Neumann 边界条件，对应弱边界层，即 u^ε 收敛但是 $\partial_1 u^\varepsilon$ 的边值在取无黏极限时出现不匹配。本题则换成了 Dirichlet 边界条件，第(1)问的情况不出现边界层，标准的能量估计即可完成证明；而第(2)问改变入流方向后则会出现u^ε自身的边值取无黏极限后不匹配的情况，也就是强边界层。本题的附加部分就是通过边界层渐近展开找出校正函数，以求得完整的无黏极限。

证明. (1) 记$\mathcal{L}_\varepsilon := \partial_t + \mathbf{b}\cdot\nabla - \varepsilon\Delta$.

(1a) 设 $\mathbf{b} = (1,0)$。先乘以 u^ε 积分，由 $u^\varepsilon|_{\partial\Omega} = 0$ 得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}^2 + \varepsilon\|\nabla u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}^2 = 0 \;\Rightarrow\; \sup_{t\in[0,T]}\|u^\varepsilon(t)\|_{L^2} \leqslant \|g\|_{L^2}.$$

再将方程两边乘以 $-\Delta u^\varepsilon$ 并积分。因为切向导数 $\partial_t u^\varepsilon = \partial_2 u^\varepsilon = 0$ on $\partial\Omega$，所以

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\nabla u^\varepsilon\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}|\partial_1 u^\varepsilon|^2\,\mathrm{d}S + \varepsilon\|\Delta u^\varepsilon\|_{L^2}^2 = 0, \Rightarrow \sup_{t\in[0,T]}\|\nabla u^\varepsilon(t)\|_{L^2} \leqslant \|\nabla g\|_{L^2}.$$

如上两式相加即得：存在不依赖 ε 的常数 $C>0$，使得

$$\sup_{t\in[0,T]}\|u^\varepsilon(t)\|_{H^1(\Omega)} \leqslant C.$$

(1b) 由于 $\tilde{g}$ 在 $x_1 \leqslant 0$ 附近为零，故 $u(t,0,x_2) = \tilde{g}(-t,x_2) = 0$. 令 $w^\varepsilon = u^\varepsilon - u$，则由 u 的方程可得

$$\partial_t w^\varepsilon + \partial_1 w^\varepsilon - \varepsilon\Delta w^\varepsilon = \varepsilon\Delta u, \qquad w^\varepsilon|_{\partial\Omega} = 0, \qquad w^\varepsilon(0) = 0.$$

乘以 w^ε 并积分，得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|w^\varepsilon\|_{L^2}^2 + \varepsilon\|\nabla w^\varepsilon\|_{L^2}^2 = \varepsilon\int_\Omega \Delta u\, w^\varepsilon\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \leqslant \varepsilon\|\Delta u\|_{L^2}\|w^\varepsilon\|_{L^2} \;\Rightarrow\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|w^\varepsilon(t)\|_{L^2} \leqslant \varepsilon\|\Delta u(t)\|_{L^2}.$$

由 $w^\varepsilon(0) = 0$，代入 u 的表达式得 $\|w^\varepsilon(t)\|_{L^2} \leqslant \varepsilon\int_0^t \|\Delta u(s)\|_{L^2}\,\mathrm{d}s \leqslant C\varepsilon$，其中 $C>0$ 依赖 g, T 但不依赖 ε。故

$$\sup_{t\in[0,T]}\|u^\varepsilon(t) - u(t)\|_{L^2(\Omega)} \leqslant C\varepsilon.$$

(2) 本题实际上可以用(2b)反过来证明(2a)，但是这么做的前提是你得先证明(2b)，否则不得分。此时 $\mathbf{b} = (-1,0)$. 则黏性问题写作

$$\partial_t u^\varepsilon - \partial_1 u^\varepsilon - \varepsilon\Delta u^\varepsilon = 0 \quad \text{in } (0,T)\times\Omega, \qquad u^\varepsilon|_{\partial\Omega} = 0, \qquad u^\varepsilon|_{t=0} = g.$$

由题中无黏解的定义可知 $u(t,x_1,x_2) = \tilde{g}(x_1+t,x_2)$，因此 $a(t,x_2) = u(t,0,x_2) = \tilde{g}(t,x_2)$. 今已知 $t_0 \in (0,T)$ 使得 $a(t_0,\cdot)$ 不恒为零，于是存在开区间 $I \subset (0,T)$ 使得 $\|a(t,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}_{x_2})} > 0$ 对任意 $t \in I$ 成立。

(2a) 反证法，假设 $\sup_{t\in[0,T]}\|u^\varepsilon(t,\cdot)\|_{H^1(\Omega)}$ 关于 ε 一致有界，则存在常数 $C>0$ 使得对任何子列 $\varepsilon_j\to 0$ 有 $\sup_{t\in[0,T]}\|u^{\varepsilon_j}(t,\cdot)\|_{H^1(\Omega)}\leqslant C$. 又因为 $u^{\varepsilon_j}|_{\partial\Omega}=0$, 所以 $u^{\varepsilon_j}\in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))$ 且在该空间中一致有界。于是存在子列(仍记为 u^{ε_j})以及极限函数 $v\in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))$ 使得 $u^{\varepsilon_j}\overset{*}{\rightharpoonup} v$ in $L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))$，由迹定理知 $\mathrm{Tr}\,v(t,\cdot)=0$ 对 a.e. $t\in(0,T)$ 成立。

接下来证明 v 必须等于无黏解 u。任取 $\varphi\in C_c^\infty([0,T)\times\Omega)$，注意 $\mathrm{Spt}\,\varphi(t,\cdot)\Subset\Omega$，故分部积分时没有空间边界项。由黏性方程可得

$$\int_0^T\int_\Omega u^{\varepsilon_j}\big(-\partial_t\varphi+\partial_1\varphi\big)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t-\int_\Omega g(\boldsymbol{x})\varphi(0,\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}+\varepsilon_j\int_0^T\int_\Omega\nabla u^{\varepsilon_j}\cdot\nabla\varphi\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t=0.$$

令$j\to\infty$，由H^1 一致有界性知上式第三项趋于零，从而

$$\int_0^T\int_\Omega v\big(-\partial_t\varphi+\partial_1\varphi\big)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t-\int_\Omega g(\boldsymbol{x})\varphi(0,\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}=0.$$

这说明 v 是传输方程 $\partial_t v-\partial_1 v=0,\ v(0,\boldsymbol{x})=g$ 在$(0,T)\times\Omega$ 中的弱解。由于此时边界 $x_1=0$ 为出流边界，该传输方程初值可以唯一确定解，且显式解为 $v(t,x_1,x_2)=\widetilde{g}(x_1+t,x_2)=u(t,x_1,x_2)$. 因此

$$\mathrm{Tr}\,v(t,x_2)=v(t,0,x_2)=u(t,0,x_2)=a(t,x_2)=0,\quad\text{for a.e. } t\in(0,T).$$

这与 $\|a(t,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}_{x_2})}>0,(t\in I)$ 矛盾。

(2b) 这一问是零阶边界层校正，记 $\mathcal{L}_\varepsilon=\partial_t-\partial_1-\varepsilon\Delta$，传输方程解为

$$u(t,x_1,x_2)=g(x_1+t,x_2),\qquad a(t,x_2)=u(t,0,x_2)=g(t,x_2).$$

引入快变量 $z=\frac{x_1}{\varepsilon}$，若 $\theta=\theta(t,z,x_2)$，则

$$\mathcal{L}_\varepsilon\theta=\partial_t\theta-\varepsilon\partial_2^2\theta-\frac{1}{\varepsilon}(\partial_z\theta+\partial_z^2\theta).$$

为消去最高阶 ε^{-1} 项，我们需要 θ_0 满足

$$\partial_z^2\theta_0+\partial_z\theta_0=0,\qquad\theta_0(t,0,x_2)=-a(t,x_2),\qquad\theta_0(t,z,x_2)\to 0\quad(z\to+\infty).$$

求解该常微分方程，算出零阶校正函数为 $\theta_0(t,z,x_2)=-a(t,x_2)e^{-z}$.

现在我们定义零阶逼近解 $u^\varepsilon_{\mathrm{app},0}(t,x_1,x_2):=u(t,x_1,x_2)+\theta_0\left(t,\frac{x_1}{\varepsilon},x_2\right)$，则据定义即可算出该函数边值是零、初值是$g$。接下来估计收敛速率，由于 u 满足 $\partial_t u-\partial_1 u=0$，所以 $\mathcal{L}_\varepsilon u=-\varepsilon\Delta u$. 又由 $\partial_z^2\theta_0+\partial_z\theta_0=0$ 得 $\mathcal{L}_\varepsilon\theta_0=\partial_t\theta_0-\varepsilon\partial_2^2\theta_0$. 因此

$$R_0^\varepsilon:=\mathcal{L}_\varepsilon u^\varepsilon_{\mathrm{app},0}=-\varepsilon\Delta u+\partial_t\theta_0\left(t,\frac{x_1}{\varepsilon},x_2\right)-\varepsilon\partial_2^2\theta_0\left(t,\frac{x_1}{\varepsilon},x_2\right).$$

其中

$$\left\|\partial_t\theta_0\left(t,\frac{x_1}{\varepsilon},x_2\right)\right\|_{L^2(\Omega)}=\varepsilon^{1/2}\|\partial_t\theta_0(t,z,x_2)\|_{L^2(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})}\leqslant C\sqrt{\varepsilon},$$

而其余项为 $O(\varepsilon)$ 或 $O(\varepsilon^{3/2})$，故 $\|R_0^\varepsilon(t)\|_{L^2(\Omega)}\leqslant C\sqrt{\varepsilon}$.

现在令 $w_0^\varepsilon=u^\varepsilon-u^\varepsilon_{\text{app},0}$，则

$$\mathcal{L}_\varepsilon w_0^\varepsilon=-R_0^\varepsilon,\qquad w_0^\varepsilon|_{\partial\Omega}=0,\qquad w_0^\varepsilon(0)=0.$$

直接作能量估计得到

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|w_0^\varepsilon\|_{L^2}^2+\varepsilon\|\nabla w_0^\varepsilon\|_{L^2}^2\leqslant\|R_0^\varepsilon\|_{L^2}\|w_0^\varepsilon\|_{L^2}\ \Rightarrow\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|w_0^\varepsilon(t)\|_{L^2}\leqslant\|R_0^\varepsilon(t)\|_{L^2}\leqslant C\sqrt{\varepsilon}.$$

由 $w_0^\varepsilon(0)=0$，得到 $\sup\limits_{t\in[0,T]}\|u^\varepsilon(t)-u^\varepsilon_{\text{app},0}(t)\|_{L^2(\Omega)}\leqslant C\sqrt{\varepsilon}$.

(2c) 我们先假设存在这样的一阶逼近，然后看一阶校正函数满足的方程是否有解。由 (2b) 零阶残差中的主项是 $\partial_t\theta_0$，其 L^2 尺度是 $\sqrt{\varepsilon}$；要改善到 $O(\varepsilon)$，需要加入尺度为 ε 的一阶边界层校正。令

$$u^\varepsilon_{\text{app},1}:=u+\theta_0\left(t,\frac{x_1}{\varepsilon},x_2\right)+\varepsilon\theta_1\left(t,\frac{x_1}{\varepsilon},x_2\right),$$

首先计算 $\mathcal{L}_\varepsilon(\varepsilon\theta_1)=\varepsilon\partial_t\theta_1-\partial_z\theta_1-\partial_z^2\theta_1-\varepsilon^2\partial_2^2\theta_1$，因此一阶逼近解 $u^\varepsilon_{\text{app},1}$ 满足

$$\mathcal{L}_\varepsilon u^\varepsilon_{\text{app},1}=\partial_t\theta_0-(\partial_z^2\theta_1+\partial_z\theta_1)-\varepsilon\Delta u-\varepsilon\partial_2^2\theta_0+\varepsilon\partial_t\theta_1-\varepsilon^2\partial_2^2\theta_1,$$

为了消去 $O(1)$ 主项（也就是(2b)中导致收敛速率只有 $O(\sqrt{\varepsilon})$ 的 $\partial_t\theta_0$ 项），我们要求一阶校正函数 θ_1 满足

$$\partial_z^2\theta_1+\partial_z\theta_1=\partial_t\theta_0,\qquad\theta_1(t,0,x_2)=0,\qquad\theta_1(t,z,x_2)\to0\quad(z\to+\infty).$$

由于 $\theta_0=-ae^{-z}$，所以 $\partial_t\theta_0=-\partial_t ae^{-z}$，求解如上常微分方程得到如下满足条件的显式解 $\theta_1(t,z,x_2)=\partial_t a(t,x_2)ze^{-z}$，于是 $u^\varepsilon_{\text{app},1}(t,0,x_2)=a(t,x_2)-a(t,x_2)+\varepsilon\theta_1(t,0,x_2)=0$. 又由于 $g\in C_c^\infty(\Omega)$ 在边界附近为零，$a(0)=a_t(0)=0$，故 $u^\varepsilon_{\text{app},1}(0)=g$。

现在估计$O(\varepsilon)$收敛速率，计算可得

$$\mathcal{L}_\varepsilon u^\varepsilon_{\text{app},1}=-\varepsilon\Delta u+\partial_t\theta_0-\varepsilon\partial_2^2\theta_0+\varepsilon\partial_t\theta_1-(\partial_z\theta_1+\partial_z^2\theta_1)-\varepsilon^2\partial_2^2\theta_1=-\varepsilon\Delta u-\varepsilon\partial_2^2\theta_0+\varepsilon\partial_t\theta_1-\varepsilon^2\partial_2^2\theta_1.$$

这里所有 θ_j 均取值于 $(t,x_1/\varepsilon,x_2)$。由 ze^{-z} 及其导数的平方可积性可得 $\|\mathcal{L}_\varepsilon u^\varepsilon_{\text{app},1}(t)\|_{L^2(\Omega)}\leqslant C\varepsilon$. 令 $w_1^\varepsilon=u^\varepsilon-u^\varepsilon_{\text{app},1}$，则 w_1^ε 满足零边值条件和零初值，并且 $\mathcal{L}_\varepsilon w_1^\varepsilon=-\mathcal{L}_\varepsilon u^\varepsilon_{\text{app},1}$. 作 L^2 能量估计即得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|w_1^\varepsilon(t)\|_{L^2}\leqslant C\varepsilon\ \Rightarrow\ \sup_{t\in[0,T]}\|u^\varepsilon(t)-u^\varepsilon_{\text{app},1}(t)\|_{L^2(\Omega)}\leqslant C\varepsilon.$$

□

试题 5B (50分). 考虑一维散焦cubic NLS，其中 $u:[0,T)\times\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ 是未知函数，$\mathbf{i}=\sqrt{-1}$是虚数单位。

$$\mathbf{i}\partial_t u+\partial_x^2 u=|u|^2 u\ \ (t\in(0,T),x\in\mathbb{R}),\quad u(0,x)=u_0(x)\ \ (x\in\mathbb{R}).\qquad\text{(NLS)}$$

(1) (15分) 设初值$u_0\in H^1(\mathbb{R})\cap H^{0,1}(\mathbb{R}):=\{f\in H^1(\mathbb{R}):xf\in L^2(\mathbb{R})\}$. 已知存在仅依赖$\|u_0\|_{H^1}$的时间 $T>0$ 使得 (NLS) 存在唯一解 $u\in C([0,T];H^1(\mathbb{R}))$.

(1a) (10分) 证明：该局部解满足 $u\in C([0,T];H^1\cap H^{0,1})$.

(1b) (5分) 设$T_*>0$为极大存在时间，证明：若$T_*<\infty$，则$\limsup\limits_{t\nearrow T_*}\left[\|u(t,\cdot)\|_{H^1}+\|xu(t,\cdot)\|_{L^2}\right]=+\infty$.

提示：推导$v(t,x):=xu(t,x)$满足的非线性Schrödinger方程，然后对v作L^2能量估计。本题不需要使用Strichartz估计。

(2) (35分，附加题) 设存在$0<\varepsilon\ll 1$使得$0<\|u_0\|_{H^1}+\|xu_0\|_{L^2}<\varepsilon$，且已知此时(NLS)在$H^1(\mathbb{R})\cap H^{0,1}(\mathbb{R})$中有整体解。再定义 $f(t,x):=e^{-\mathbf{i}t\partial_x^2}u(t,x)$ (即 $\hat{f}(t,\xi)=e^{\mathbf{i}t\xi^2}\hat{u}(t,\xi)$)，且已知存在常数$c\neq 0,\delta>0,C>0$使得对任意$t\geqslant 1$成立

$$\partial_t\hat{f}(t,\xi)=-\mathbf{i}ct^{-1}|\hat{f}(t,\xi)|^2\hat{f}(t,\xi)+R(t,\xi),\quad \|R(t,\cdot)\|_{L^2}\leqslant C\varepsilon^3 t^{-1-\delta},\quad |\hat{f}(t,\xi)|\leqslant C\varepsilon.$$

(2a) (7分) 定义非线性相位 $\Phi(t,\xi):=-c\int_1^t s^{-1}|\hat{f}(s,\xi)|^2\,\mathrm{d}s$ 以及 $g(t,\xi):=\hat{f}(t,\xi)e^{-\mathbf{i}\Phi(t,\xi)}$. 证明：存在 $g_+\in L^2(\mathbb{R})$ 使得 $\lim\limits_{t\to+\infty}\|g(t,\cdot)-g_+\|_{L^2_\xi(\mathbb{R})}=0$.

(2b) (21分) 证明：存在不恒为零的$W_+\in L^2(\mathbb{R})$使得

$$\lim_{t\to+\infty}\|\hat{f}(t,\xi)-W_+(\xi)\exp(-\mathbf{i}c|W_+(\xi)|^2\log t)\|_{L^2_\xi}=0.$$

进而存在逼近解 $u_{\mathrm{app}}(t,x)$ 使得 $\lim\limits_{t\to+\infty}\|u(t,\cdot)-u_{\mathrm{app}}(t,\cdot)\|_{L^2_x(\mathbb{R})}=0$.

(2c) (7分) 用(2b)证明：不存在 $u_+\in L^2(\mathbb{R})$ 使得 $\lim\limits_{t\to+\infty}\|u(t,\cdot)-e^{\mathbf{i}t\partial_x^2}u_+\|_{L^2_x(\mathbb{R})}=0$.

注：$\|u_0\|_{H^1}+\|xu_0\|_{L^2}\ll 1$ 主要是为了保证(2)中给出的那些已知的估计是成立的。
提示：(2b)可以先证明$\int_1^t s^{-1}(|\hat{f}(s,\xi)|^2-|g_+(\xi)|^2)\,\mathrm{d}s$在适当意义下收敛，然后把收敛的相位修正吸收到$W_+$中。(2c)也可以直接证明，而不依赖(2b).

解析. 本题是色散方程中的著名实例：一维cubic NLS具有小初值整体解，但没有线性散射，只有长程散射 (modified scattering). 关于cubic NLS，我们上课讲了二维情况（质量临界），作业四的第8题是三维情况（能量次临界），这二者都需要借助 Strichartz 估计来求解；而一维情况因为 $H^1\hookrightarrow L^\infty$，所以求解方程直接在 H^1 中完成即可。而线性散射在一维情况不成立的原因，是线性Schrödinger的 L^∞ 衰减率为 $O(1/t^{d/2})$，所以cubic项的 L^2 至多只有 $O(1/t^d)$ 衰减，在 $d=1$ 时它关于 t 不可积且会

产生 $O(\log t)$ 的增长，这也是附加题 (2b) 里面 $\log t$ 相位的由来。证明长程散射所需的调和分析结论已经全部打包为已知的不等式，因此本题是一个纯粹考PDE的题目。

本题考虑的cubic NLS长程散射可以视作一个model problem，它的思想被用于多个著名工作，代表之一就是 Ionescu–Pusateri 证明二维不可压缩重力水波方程小初值整体解的著名结果 (Invent. Math. 2015)，他们正是借用 modified scattering 的想法，把邬似珏教授证明的首个长时间适定性结果（almost global well-posedness, Invent. Math. 2009）做到整体解。

证明. (1a) 令 $v(t,x) := xu(t,x)$ 代入 NLS 方程得到 v 满足的方程为 $\mathbf{i}\partial_t v + \partial_x^2 v = |u|^2 v + 2\partial_x u$. 对 v 作 L^2 能量估计。因为 $|u|^2$ 是实值函数，线性 Schrödinger 主部和势能项均不贡献 L^2 实部，故

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|v(t)\|_{L^2}^2 \leqslant C\|\partial_x u(t)\|_{L^2}\|v(t)\|_{L^2}.$$

由于已知 $u \in C([0,T];H^1)$，右端在 $[0,T]$ 上有界，于是

$$\sup_{t\in[0,T]}\|xu(t)\|_{L^2} \leqslant \|xu_0\|_{L^2} + C_T \sup_{t\in[0,T]}\|u(t)\|_{H^1} < \infty.$$

据 Duhamel 原理 $v(t) = e^{\mathbf{i}t\partial_x^2}v(0) - \mathbf{i}\int_0^t e^{\mathbf{i}(t-s)\partial_x^2}\left(|u|^2 v + 2\partial_x u\right)(s)\,\mathrm{d}s$ 以及 $H^1(\mathbb{R}) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R})$ 可得 $v \in C([0,T];L^2)$。因此 $u \in C([0,T];H^1 \cap H^{0,1})$.

(1b) 若 $T_* < \infty$ 而 $\limsup\limits_{t\nearrow T_*}\left(\|u(t)\|_{H^1} + \|xu(t)\|_{L^2}\right) < \infty$. 则 $\|u(t)\|_{H^1}$ 在 $t \nearrow T_*$ 时有界。由题设，局部存在时间只依赖 $\|u(t_0)\|_{H^1}$，因此可从充分接近 T_* 的 t_0 重新以 $u(t_0)$ 为初值求解，并把解延拓到 T_* 之后。又由(1a)，加权范数也在新的局部时间内保持有限。这与 T_* 的极大性矛盾。因此 $\limsup\limits_{t\nearrow T_*}\left[\|u(t)\|_{H^1} + \|xu(t)\|_{L^2}\right] = +\infty$.

(2a) 由定义

$$\Phi(t,\xi) = -c\int_1^t s^{-1}|\widehat{f}(s,\xi)|^2\,\mathrm{d}s, \qquad g(t,\xi) := \widehat{f}(t,\xi)e^{-\mathbf{i}\Phi(t,\xi)}.$$

注意 $\partial_t\Phi = -ct^{-1}|\widehat{f}|^2$，所以直接计算的得到

$$\partial_t g = \left(\partial_t\widehat{f} - \mathbf{i}(\partial_t\Phi)\widehat{f}\right)e^{-\mathbf{i}\Phi} = \left(-\mathbf{i}ct^{-1}|\widehat{f}|^2\widehat{f} + R + \mathbf{i}ct^{-1}|\widehat{f}|^2\widehat{f}\right)e^{-\mathbf{i}\Phi} = R(t,\xi)e^{-\mathbf{i}\Phi(t,\xi)}.$$

于是 $\|\partial_t g(t)\|_{L^2_\xi} = \|R(t)\|_{L^2_\xi} \leqslant C\varepsilon^3 t^{-1-\delta}$，右端在 $[1,\infty)$ 上可积，所以 $g(t)$ 在 L^2_ξ 中是 Cauchy 的。故存在 $g_+ \in L^2(\mathbb{R})$，使得 $\lim\limits_{t\to\infty}\|g(t) - g_+\|_{L^2_\xi} = 0$，并且由积分估计还得到收敛速度 $\|g(t) - g_+\|_{L^2} \leqslant C\varepsilon^3 t^{-\delta}$,

此外由 $|g(t,\xi)| = |\widehat{f}(t,\xi)| \leqslant C\varepsilon$，可取子列得到 $|g_+(\xi)| \leqslant C\varepsilon$ 对 a.e. $\xi \in \mathbb{R}$ 成立。

(2b) 因为 $|g| = |\widehat{f}|$，由上面的收敛速度和 L^∞ 界可得

$$\left\||g(t)|^2 - |g_+|^2\right\|_{L^2} \leqslant (\|g(t)\|_{L^\infty} + \|g_+\|_{L^\infty})\|g(t) - g_+\|_{L^2} \leqslant C\varepsilon^4 t^{-\delta}.$$

因此存在 $\Psi_+(t,\cdot)\in L^2_\xi$ 使得 $\Psi(t,\xi) := -c\int_1^t s^{-1}\left(|g(s,\xi)|^2-|g_+(\xi)|^2\right)\mathrm{d}s \xrightarrow{L^2_\xi(\mathbb{R})} \Psi_+(t,\xi)$. 另一方面，我们有 $\Phi(t,\xi)=-c|g_+(\xi)|^2\log t+\Psi(t,\xi)$，而由 $g=\widehat{f}e^{-\mathbf{i}\Phi}$ 得 $\widehat{f}=ge^{\mathbf{i}\Phi}$，于是

$$\widehat{f}(t,\xi)=g(t,\xi)e^{\mathbf{i}\Psi(t,\xi)}\exp\left(-\mathbf{i}c|g_+(\xi)|^2\log t\right).$$

定义 $W_+(\xi):=g_+(\xi)e^{\mathbf{i}\Psi_+(\xi)}$，则 $|W_+|=|g_+|$，并且

$$\begin{aligned}&\left\|\widehat{f}(t)-W_+\exp\left(-\mathbf{i}c|W_+|^2\log t\right)\right\|_{L^2}=\left\|g(t)e^{\mathbf{i}\Psi(t)}-g_+e^{\mathbf{i}\Psi_+}\right\|_{L^2}\\ \leqslant{}&\|g(t)-g_+\|_{L^2}+\|g_+\|_{L^\infty}\|e^{\mathbf{i}\Psi(t)}-e^{\mathbf{i}\Psi_+}\|_{L^2}\leqslant\|g(t)-g_+\|_{L^2}+C\varepsilon\|\Psi(t)-\Psi_+\|_{L^2}\to 0.\end{aligned}$$

这就证明了

$$\lim_{t\to\infty}\left\|\widehat{f}(t,\xi)-W_+(\xi)\exp\left(-\mathbf{i}c|W_+(\xi)|^2\log t\right)\right\|_{L^2_\xi}=0.$$

下面说明 W_+ 不恒为零。这样的 NLS 具有质量守恒 $\|u(t)\|_{L^2}=\|u_0\|_{L^2}$. 因为 $\|u_0\|_{L^2}>0$，所以

$$\|g(t)\|_{L^2_\xi}=\|\widehat{f}(t)\|_{L^2_\xi}=\|u(t)\|_{L^2_x}=\|u_0\|_{L^2_x}>0.$$

令 $t\to\infty$ 得 $\|g_+\|_{L^2}=\|u_0\|_{L^2}>0$，因此 W_+ 不恒为零。

今通过Fourier变换来定义逼近解 u_{app}如下

$$\widehat{u_{\mathrm{app}}}(t,\xi):=e^{-\mathbf{i}t\xi^2}W_+(\xi)\exp\left(-\mathbf{i}c|W_+(\xi)|^2\log t\right).$$

由于 $\widehat{u}(t,\xi)=e^{-\mathbf{i}t\xi^2}\widehat{f}(t,\xi)$，据 Plancherel 定理立刻得到 $\lim\limits_{t\to\infty}\|u(t)-u_{\mathrm{app}}(t)\|_{L^2_x}=0$.

(2c) 反证法，假设存在 $u_+\in L^2(\mathbb{R})$ 使得 $\|u(t)-e^{\mathbf{i}t\partial_x^2}u_+\|_{L^2_x}\to 0$，则对两边作用 $e^{-\mathbf{i}t\partial_x^2}$，由酉算子的性质得 $\|f(t)-u_+\|_{L^2_x}\to 0$，进而 $\|\widehat{f}(t)-\widehat{u}_+\|_{L^2_\xi}\to 0$. 由(2b)知函数族 $H(t,\xi):=W_+(\xi)\exp\left(-\mathbf{i}c|W_+(\xi)|^2\log t\right)$ 也必须在 L^2_ξ 中收敛。

下面说明这不可能发生，事实上由于 $|W_+(\xi)|\leqslant C\varepsilon$ a.e. 成立，所以我们可以取 $\lambda\neq 1$ 但足够接近 1 使得 $0<|c|\|W_+\|^2_{L^\infty}|\log\lambda|<2\pi$. 若 $H(t)$ 在 L^2 中收敛，则应有 $\|H(\lambda t)-H(t)\|_{L^2}\to 0$. 然而直接计算得

$$\|H(\lambda t)-H(t)\|^2_{L^2}=\int_{\mathbb{R}}|W_+(\xi)|^2\left|e^{-\mathbf{i}c|W_+(\xi)|^2\log\lambda}-1\right|^2\mathrm{d}\xi.$$

右端与 t 无关。今选取 λ 使得 $W_+(\xi)\neq 0$，这样的话 $\left|e^{-\mathbf{i}c|W_+(\xi)|^2\log\lambda}-1\right|>0$，但是$W_+$ 不恒为零，所以该积分严格大于零，这与 $\|H(\lambda t)-H(t)\|_{L^2}\to 0$ 矛盾。 $\square$