

**中国科学技术大学**  
**2026-2027 学年第一学期常微分方程课堂测验**

姓名：\_\_\_\_\_

学号：\_\_\_\_\_

考试时间：2026 年 10 月 9 日 9:50:00-11:20

试卷总分：55 分

|    |   |   |   |   |    |
|----|---|---|---|---|----|
| 题号 | 1 | 2 | 3 | 4 | 总分 |
| 得分 |   |   |   |   |    |

- 请直接在试卷纸上答题，草稿纸上的答案无效！
- 闭卷考试，禁止使用任何电子设备或翻阅参考资料。考试期间发现作弊将按校规处理。
- 允许使用课上讲过的定理和结论，但需要准确陈述。有多个小问的题，如果某一小问不会做，可假设其成立（请注明）继续做后面的小问。

试题 1 (10 分). 求微分方程  $y'' + y' - 2y = e^x(\cos x - 7 \sin x)$  的通解。

试题 2 (15 分). 求解微分方程组的初值问题

$$\frac{d\mathbf{y}(x)}{dx} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{y}(x) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ e^x \cos 2x \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

试题 3 (15 分). 设  $f(x, y)$  是  $\mathbb{R}^2$  上的连续函数, 并且存在非负可积函数  $k(x)$ , 使得

$$|f(x, y)| \leq k(x)(1 + |y|),$$

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq k(x)|y_1 - y_2|.$$

证明: 存在  $h > 0$ , 使得初值问题

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

的解在  $[x_0, x_0 + h]$  上存在。

(本页可继续作答)

试题 4 (15 分). 考虑一阶常微分方程

$$y' = 1 + x^2 + y^2.$$

(1) 设  $y = y(x)$  是上述方程的任意极大解, 其极大存在区间记为  $(\alpha, \beta)$ 。证明

$$-\infty < \alpha < \beta < +\infty.$$

(2) 设  $\varphi$  是初值问题

$$y' = 1 + x^2 + y^2, \quad y(0) = 0$$

的极大解, 其极大存在区间记为  $(-\beta, \beta)$ 。

对每个  $n \geq 1$ , 令  $\varphi_n$  表示初值问题

$$y' = 1 + x^2 + y^2, \quad y\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^2}$$

的极大解。

证明: 对任意

$$0 < \varepsilon < \beta,$$

存在正整数  $N = N(\varepsilon)$ , 使得当  $n \geq N$  时,  $\varphi_n$  在闭区间  $[-\beta + \varepsilon, \beta - \varepsilon]$  上有定义。

(本页可继续作答)