2026 春数值分析期中

授课老师：徐岩、夏银华

1 第一题

(1) 定义 $x_0=-1,\ x_1=0,\ x_2=1$。对 $f(x_0)=1,\ f'(x_0)=2,\ f(x_1)=3,\ f(x_2)=4$，构造差商表。
(2) 对上述条件，求 Newton 插值多项式。

2 第二题

设 $f\in C^{2n+2}[a,b]$，对结点 $a\le x_0<x_1<...<x_n\le b$ 做 Hermite 插值，得到唯一的次数不超过 $2n+1$ 的多项式 $p(x)$。证明：对 $\forall x\in[a,b]$，存在 $\varepsilon_x\in(a,b)$ 让

$$f(x)-p(x)=\frac{f^{(2n+2)}(\varepsilon_x)}{(2n+2)!}\Pi_{i=0}^{n}(x-x_i)^2.$$

3 第三题

设 $u\in H^r_{per}[0,2\pi]$，定义

$$P_{2N}u=\sum_{|n|\le N}\hat{u}_n e^{inx}.$$

这里，$\hat{u}_n$ 是第 n 个傅里叶系数。请估计

$$\|u-P_{2N}u\|_{L^\infty[0,2\pi]}.$$

4 第四题

对 $p(x)=x^3+ax^2+bx+c$，求最优的系数 a,b,c，让它与下表数据实现最佳的平方逼近。

x	1	2	3	4	5	6	7	8
y	6	2	3	9	14	10	8	5

Remark 1 提示（试卷上没有这个提示，它是我整理试题时加的）：

$$\left(\begin{pmatrix}1^2 & 2^2 & 3^2 & 4^2 & 5^2 & 6^2 & 7^2 & 8^2\\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8\\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1^2 & 1 & 1\\ 2^2 & 2 & 1\\ 3^2 & 3 & 1\\ 4^2 & 4 & 1\\ 5^2 & 5 & 1\\ 6^2 & 6 & 1\\ 7^2 & 7 & 1\\ 8^2 & 8 & 1\end{pmatrix}\right)^{-1}\begin{pmatrix}1^2 & 2^2 & 3^2 & 4^2 & 5^2 & 6^2 & 7^2 & 8^2\\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8\\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6-1^3\\ 2-2^3\\ 3-3^3\\ 9-4^3\\ 14-5^3\\ 10-6^3\\ 8-7^3\\ 5-8^3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{2335}{168}\\ \frac{9353}{168}\\ -\frac{2855}{56}\end{pmatrix}.$$

5 第五题

对 $p(x)=x^2+ax+b$，分别对范数

$$\|p\|_\infty=\max_{x\in[-1,1]}|p(x)|,\quad \|p\|_{L^2}=\sqrt{\int_{-1}^{1}p^2(x)dx},$$

求使之最小的 (a,b)。

6 第六题

(1) 用 $w_0f(-\alpha)+w_1f(\alpha)$ 来逼近 $\int_{-1}^{1}f(x)dx$，其中 $\alpha\in(0,1]$。证明：此逼近对所有线性函数是精确的，等价于 $w_0=w_1=1$，且之与 α 无关。

(2) 若要求 (1) 中的逼近对任何二次函数是精确的，求 α。

7 第七题

(1) 定义权函数 $w(x)=x^2$，$x\in[-1,1]$。构造加权 w 的 $L^2[-1,1]$ 内积下的 0，1，2 次正交多项式。

(2) 给出 (1) 中加权内积下，对应的二结点和三结点的 Gauss 插值。