数值分析 2026 年春期末考

1. 给定 $f \in C^2[-1,1]$, 节点 $x_0 = -1, x_1 = 1$, 求对应的拉格朗日插值函数以及误差估计，并证明误差估计中的等号可以取到。

2. (1) 给定多项式空间 $\mathcal{P}$，求证若 $f \in C[-1,1]$ 是奇函数，则其最佳一致逼近也是奇函数。

(2) 求一个二次多项式，使之在 $C[-1,1]$ 中最佳逼近 $f(x) = \sin x$，只需列出方程，无需求解具体数值。

3. 设 $r \in \mathbb{Z}$ (考场上没有给出这一条), $m \in \mathbb{Z}^+$. 证明若 r 不是 m 的倍数，则

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(rx)\,\mathrm{d}x, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin(rx)\,\mathrm{d}x$$

将 $[-\pi, \pi]$ 划分为 m 个均匀区间的复化梯形公式是准确的。

4. 设有积分公式

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x \approx w_1 f(-1) + w_2 f(-\frac{1}{3}) + w_3 f(\frac{1}{3}) + w_4 f(1)$$

求出 w_1, w_2, w_3, w_4 的值使之代数精度最高。此时，对于对五次多项式的积分，这个公式和 Simpson 公式哪个更为精确？

5. (1) 设 Chebyshev 多项式 $f_n(x) = \cos(n \arccos x)$. 求证它是 $[-1,1]$ 上关于权重 $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 的正交多项式，并证明递推公式 $f_{n+1}(x) = 2x f_n(x) - f_{n-1}(x)$.

(2) 给出 $[-1,1]$ 上关于权重 $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 的三点高斯积分公式。它具有几阶代数精度？

6. 考虑 ODE 的格式

$$y_{n+1} + a y_{n-1} + b y_{n-2} = h f_n$$

(1) 求出 a, b 使得此方法是相容的。

(2) 此时它收敛吗？

7. 考虑 ODE 的格式

$$y_{n+1} = y_{n-1} + \frac{h}{8}(5f_{n+1} + 6f_n + 5f_{n-1})$$

(1) 求它的截断误差的最高次项。

(2) 求其特征方程的根 r_1, r_2.

(3) 写出 A-稳定性的定义以及本题中方法 A-稳定的条件，只需列出，无需求解。

8. 考虑 θ 格式

$$y_{n+1} = y_n + (1-\theta)h f_n + \theta h f_{n+1}, \ \theta \in [0,1]$$

求证此方法是 A-稳定的，当且仅当 $\theta \geq \frac{1}{2}$.