

2026 年数值分析进阶考试

1. 对混合边值问题

$$\begin{cases} -u'' = f & \text{on } [0, 1] \\ u(0) = u'(1) = 0 \end{cases}$$

进行 N 等分离散: $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = 1$, 得到 $AU = F$. 可否使得到的 A 是对称正定矩阵?

2. 回忆 Jacobi 迭代矩阵 $G_J = I - D^{-1}A$, 已知其特征值 $\mu_k = \cos(\frac{(2k-1)\pi}{2N})$, $k = 1, 2, \cdots, N$. 求对应的加权 Jacobi 迭代矩阵, 如何选取 ω 得到最佳的平滑因子?
3. 我们使用 V-cycle 格式求解这个方程组. 写出 I_h^{2h} 和 I_{2h}^h 的表达式, 并写出完整的 V-cycle 算法. 估计单次 V-cycle 的计算复杂度和收敛到预期精度的计算复杂度.
4. 写出完整的 Full Multigrid 算法并估算收敛到预期精度的计算复杂度.
5. 至少举出两个多重网格法表现不佳的例子, 分析原因并给出解决方案.