第 15 章课堂小测验卷

数学分析（B3）　　满分 20 分

考试时长：60 分钟

一、（6 分） 设实值连续的 2π 周期函数列 $\{f_n\}$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛于 f。证明：对每个固定的频率，f_n 的 Fourier 系数收敛于 f 的相应系数。这里采用记号

$$a_k(h) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(x)\cos kx\,dx \qquad (k \ge 0),$$
$$b_k(h) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(x)\sin kx\,dx \qquad (k \ge 1).$$

二、（6 分） 设实值函数列 $\{f_n\} \subset C([0,1])$ 一致等度连续，且

$$\int_0^1 |f_n(x)|\,dx \to 0.$$

证明：f_n 在 $[0,1]$ 上一致收敛于零。

三、（8 分） 设 $\{f_n\} \subset C([0,1])$ 为实值函数列，一致等度连续，且对每个整数 $k \ge 0$，都有

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 x^k f_n(x)\,dx = 0.$$

下文 $\|h\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]}|h(x)|$。题设没有预先假定 $\{f_n\}$ 一致有界。

(1)（4 分）　　证明 $\{f_n\}$ 一致有界。

(2)（4 分）　　证明 f_n 在 $[0,1]$ 上一致收敛于零。