2025 ～2026 学年《数学分析B2》期末考试解答

一、(每小题6分, 共24分) 计算下列各题.

1. 计算曲线积分$\int_L (3xy+4y^2+5x^2)\mathrm{d}s$, 其中$L:\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{5}=1$, 其周长为 a.

   解:积分曲线关于x,y轴均对称,$\int_L 3xy\mathrm{d}s=0$.

   由积分曲线方程

   $$\int_L (3xy+4y^2+5x^2)\mathrm{d}s=\int_L 4y^2+5x^2\mathrm{d}s=\int_L 20\mathrm{d}s=20a.$$

2. 验证积分与路径无关, 并计算$\int_{(1,1,1)}^{(2,2,2)}\left(1-\dfrac{1}{y}+\dfrac{y}{z}\right)\mathrm{d}x+\left(\dfrac{x}{z}+\dfrac{x}{y^2}\right)\mathrm{d}y-\dfrac{xy}{z^2}\mathrm{d}z$.

   解:$(1,1,1),(2,2,2)$在第一卦限, 此区域为曲面单连通区域,

   $$\begin{aligned}&\left(1-\frac{1}{y}+\frac{y}{z}\right)\mathrm{d}x+\left(\frac{x}{z}+\frac{x}{y^2}\right)\mathrm{d}y-\frac{xy}{z^2}\mathrm{d}z\\ =&\mathrm{d}x+(-\frac{1}{y}\mathrm{d}x+\frac{x}{y^2}\mathrm{d}y)+(\frac{y}{z}\mathrm{d}x+\frac{x}{z}\mathrm{d}y-\frac{xy}{z^2}\mathrm{d}z)=\mathrm{d}(x-\frac{x}{y}+\frac{xy}{z})=\mathrm{d}\varphi\end{aligned}$$

   所以积分与路径无关.

   $$\int_{(1,1,1)}^{(2,2,2)}\left(1-\frac{1}{y}+\frac{y}{z}\right)\mathrm{d}x+\left(\frac{x}{z}+\frac{x}{y^2}\right)\mathrm{d}y-\frac{xy}{z^2}\mathrm{d}z=\varphi(2,2,2)-\varphi(1,1,1)=2.$$

3. 利用Euler积分计算积分$\int_0^{+\infty}\dfrac{e^{-2t}}{\sqrt{\pi t}}\mathrm{d}t$.

   解:令$u=2t$, 则$t=u/2$, $dt=du/2$

   $$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-2t}}{\sqrt{\pi t}}\,dt=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^{+\infty}u^{-1/2}e^{-u}\,du=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

4. 设L 为$|x|+|y|=1$ 所围成的正向曲线, 计算$\oint_L\dfrac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{|x|+|y|}$.

   解:在L 上$|x|+|y|=1$, 所以$\oint_L\dfrac{x\,dy-y\,dx}{|x|+|y|}=\oint_L(x\,dy-y\,dx)$.

   $$\text{原积分}=\oint_L(x\,dy-y\,dx)\overset{Green\text{公式}}{=\!=\!=\!=}2\iint_{|x|+|y|\le 1}2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=4.$$

二、(本题10 分) 计算曲面积分$\iint_S(xy+yz+zx)\mathrm{d}S$ 其中S为锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面$x^2+y^2=2x$ 所截下部分.

解: 曲面关于xOz面对称, 所以$\iint_S(xy+yz)\mathrm{d}S=0$.

曲面$z=\sqrt{x^2+y^2}$, 投影区域$D:(x-1)^2+y^2\le 1$.

$$z_x=\frac{x}{x^2+y^2},\ z_y=\frac{y}{x^2+y^2},\ \mathrm{d}S=\sqrt{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$$\text{原式}=\iint_S zx\mathrm{d}S=\iint_D x\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{64}{15}\sqrt{2}.$$

三、(本题12 分) 设向量场 $\boldsymbol{F}=(x-z,\ x^3+yz,\ -3xy^2)$, 计算曲面积分

$$\iint_\Sigma(\nabla\times\boldsymbol{F})\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S,$$

其中Σ 是锥面$z=2-\sqrt{x^2+y^2}$ 在xOy 平面上方的部分, 取上侧.

解法1： 补面$\Sigma_1:z=0\ (x^2+y^2\le 4)$, 取下侧. $\Sigma+\Sigma_1$ 为锥体Ω 的边界.

$$\iint_{\Sigma+\Sigma_1}(\nabla\times\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}\mathrm{d}S\ \overset{Gauss\text{公式}}{=\!=\!=\!=}\ \iiint_\Omega\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{F})\mathrm{d}V=0.$$

$$\therefore\quad \iint_\Sigma(\nabla\times\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}\mathrm{d}S=-\iint_{\Sigma_1}(\nabla\times\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}\mathrm{d}S=\iint_{x^2+y^2\le 4}3x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=12\pi.$$

解法2： 利用斯托克斯公式把曲面积分化为曲线积分.

Σ与xOy平面的交线, 即Σ的边界为$L:x^2+y^2=4,z=0$, 逆时针方向

$$\iint_\Sigma\mathrm{rot}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}\ \overset{Stokes\text{公式}}{=\!=\!=\!=}\ \oint_L(x-z)\mathrm{d}x+(x^3+yz)\mathrm{d}y-3xy^2\mathrm{d}z$$
$$=\oint_L x\mathrm{d}x+x^3\mathrm{d}y\ \overset{Green\text{公式}}{=\!=\!=\!=}\ \iint\limits_{x^2+y^2\le 4}3x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=12\pi.$$

四、(本题共14 分) 设$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\pi-1}{2}x, & 0\le x\le 1\\ \dfrac{\pi-x}{2}, & 1<x\le\pi\end{cases}.$

(1) 将$f(x)$展开为正弦级数; (2) 求级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin n}{n}\right)^2$ 和$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{n^4}$ 的和.

解: 将$f(x)$奇延拓到$[-\pi,\pi]$, 再以2π为周期延拓到$\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}b_n&=\frac{2}{\pi}\left[\frac{\pi-1}{2}\int_0^1 x\sin(nx)\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_1^\pi(\pi-x)\sin(nx)\mathrm{d}x\right]\\&=\frac{1}{\pi}\left[(\pi-1)\left(-\frac{\cos n}{n}+\frac{\sin n}{n^2}\right)+\left(\frac{(\pi-1)\cos n}{n}+\frac{\sin n}{n^2}\right)\right]=\frac{\sin n}{n^2}\end{aligned}$$

所以$f(x)$的正弦级数为$f(x)\sim\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^2}\sin(nx)$

由Dirchlet收敛定理, $f(x)$在$[0,\pi]$上分段光滑且连续, 则其正弦级数收敛于自身,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^2}\sin(nx)=f(x),\quad x\in[0,\pi].$$

取$x=1$可得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{n^2}=\frac{\pi-1}{2}.$$

由Parseval等式得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{n^4}=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi(\pi-1)^2}{12}=\frac{(\pi-1)^2}{6}.$$

五、(本题15 分) (1) 设函数$u(x,y,z),v(x,y,z)$在闭区域Ω上有二阶连续偏导数, 证明

$$\oiint_S u\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}S=\iiint_\Omega (u\Delta v+\nabla u\cdot\nabla v)\,\mathrm{d}V$$

其中S 是Ω 的整个边界曲面, $\boldsymbol{n}$ 是S 的单位外法向.

(2) 设函数$f(x,y,z)$ 在区域$\Omega=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\le 1\}$ 上有二阶连续偏导数, 且满足

$$\triangle f=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=x^2+y^2+z^2.$$

计算三重积分

$$I=\iiint_\Omega\left(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}\right)\mathrm{d}V.$$

解: (1) 由Gauss公式

$$\oiint_S u\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}S=\oiint_S u\nabla v\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=\iiint_V\nabla\cdot(u\nabla v)\mathrm{d}V=\iiint_\Omega(u\Delta v+\nabla u\cdot\nabla v)\,\mathrm{d}V$$

(2) 取$u=\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)$, 则$\nabla u=(x,y,z)$, 故由（1）的结论

$$\begin{aligned}I&=\iiint_\Omega\left(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}\right)\mathrm{d}V=\iiint_\Omega\nabla u\cdot\nabla f\mathrm{d}V=\oiint_S u\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}S-\iiint_\Omega u\Delta f\mathrm{d}V\\&=\frac{1}{2}\oiint_S\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}S-\frac{1}{2}\iiint_\Omega(x^2+y^2+z^2)^2\mathrm{d}V\end{aligned}$$

再利用Gauss公式及球坐标变换可得

$$I=\frac{1}{2}\iiint_\Omega\Delta f-(x^2+y^2+z^2)^2\mathrm{d}V=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^\pi\mathrm{d}\theta\int_0^1(r^2-r^4)r^2\sin\theta\mathrm{d}r=\frac{4}{35}\pi.$$

六、(本题共15 分) 设$F(t)=\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\arctan(tx)}{x^2\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x.$

(1) 证明对任何t 积分收敛, 且可微;　(2) 计算$F'(t)$ 及$F(t)$.

解:(1) $x=1$ 为瑕点, $F(t)=\displaystyle\left(\int_1^2+\int_2^{+\infty}\right)\frac{\arctan tx}{x^2\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x$. 由于$|\arctan(tx)|\le\frac{\pi}{2}$,

$$x\to1^+\text{时},\ \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}}\sim\frac{1}{\sqrt{2(x-1)}},\text{瑕积分}\int_1^2\frac{\arctan tx}{x^2\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x\text{收敛}.$$

$$x\to+\infty\text{时},\left|\frac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}}\right|\le\frac{1}{x^3},\text{无穷积分}\int_2^{+\infty}\frac{\arctan tx}{x^2\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x\text{收敛}.$$

所以对任意$t\in\mathbb{R}$ 积分均收敛.

记 $f(x,t)=\dfrac{\arctan(tx)}{x^2\sqrt{x^2-1}}$, $\dfrac{\partial f}{\partial t}=\dfrac{1}{x(1+t^2x^2)\sqrt{x^2-1}}$. 由于$f(x,t)$, $f_t'(x,t)$ 在$[1,+\infty)\times(-\infty,+\infty)$ 上连续; $\displaystyle\int_1^{+\infty}f(x,t)\mathrm{d}x$ 对任意t 收敛; 对任意$t\in\mathbb{R}$, $\left|\dfrac{\partial f}{\partial t}\right|\le\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$, 且$\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$ 收敛, 由魏尔斯特拉斯判别法, $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\partial f}{\partial t}\mathrm{d}x$在$(-\infty,+\infty)$上

一致收敛. 所以$F(t)$在$(-\infty,+\infty)$ 内可微, 且可积分下求导.

(2) $F'(t)=\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(1+t^2x^2)\sqrt{x^2-1}}\xlongequal{x=\sec u}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}u}{1+t^2\sec^2 u}$

$\displaystyle\xlongequal{v=\tan u}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}v}{(1+v^2)[1+t^2(1+v^2)]}=\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{1+v^2}-\frac{t^2}{[1+t^2(1+v^2)]}\right)\mathrm{d}v$

$\displaystyle=\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{|t|}{\sqrt{1+t^2}}\right)$

$F(t)$ 为奇函数, $F(0)=0$. 积分得$F(t)=\begin{cases}\frac{\pi}{2}\left(t+1-\sqrt{1+t^2}\right), & t\geq 0\\ \frac{\pi}{2}\left(t-1+\sqrt{1+t^2}\right), & t<0.\end{cases}$

七、(本题共10 分) 设D 是平面有界区域, 边界∂D 分段光滑, $f(x,y),\varphi(x,y)$ 在$\overline{D}$ 上有二阶连续偏导数, 且满足

$$\Delta f-2\nabla\varphi\cdot\nabla f=f\qquad (x,y)\in D.$$

(1) 设$w(x,y)$ 在$\overline{D}$ 上有一阶连续偏导数, 且$w(x,y)>0$, 计算$\nabla\cdot(wf\nabla f)$, 并求出使

$$\nabla\cdot(wf\nabla f)=w\left(|\nabla f|^2+f^2\right)$$

成立的$w(x,y)$.

(2) 证明: 当$f(x,y)$ 在∂D 恒为0 时, 则它在D 内也恒为0.

解:(1) $\nabla\cdot\left(wf\nabla f\right)=w|\nabla f|^2+f\,\nabla w\cdot\nabla f+wf\Delta f.$

比较题中等式得 $wf\Delta f+f\,\nabla w\cdot\nabla f=wf^2$. 将原方程代入上式:

$$wf\big(f+2\nabla\varphi\cdot\nabla f\big)+f\,\nabla w\cdot\nabla f=wf^2$$

这样对题中所求$w(x,y)$只要满足

$$\nabla w+2w\,\nabla\varphi=\mathbf{0}\Longrightarrow\nabla(\ln w)=-2\nabla\varphi$$

解得 $w(x,y)=Ce^{-2\varphi(x,y)}$. 由条件$w(x,y)>0$, 则$C>0$.

(2) 由已知条件及(1) 的结论, 利用格林公式

$$0=\oint_{\partial D}wf\nabla f\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}s=\iint_D\nabla\cdot\big(wf\nabla f\big)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D w\big(|\nabla f|^2+f^2\big)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

由于$w>0$, 且$|\nabla f|^2\geq 0,\ f^2\geq 0$, 故被积函数$w\big(|\nabla f|^2+f^2\big)\geq 0$ 为$\overline{D}$ 上非负连续函数, 非负连续函数在有界区域上积分等于零, 必有

$$w\big(|\nabla f|^2+f^2\big)\equiv 0,\quad (x,y)\in D.$$

$|\nabla f|^2+f^2\equiv 0\implies f\equiv 0,\quad\nabla f\equiv\mathbf{0}$. 因此在$D$ 内有$f\equiv 0$.