中国科学技术大学 2026～2027 学年第 1 学期期中考试
数学分析 B1 参考答案

一. 计算以下极限 (每小题 6 分, 共 36 分)

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-2n}-\sqrt{n^2+n}\right)$.

解: 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n^2-2n)-(n^2+n)}{\sqrt{n^2-2n}+\sqrt{n^2+n}}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-3n}{\sqrt{n^2-2n}+\sqrt{n^2+n}}=-\dfrac{3}{2}$.

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2^{-n}+3^{-n}+5^{-n}\right)^{\frac{1}{n}}$.

解: 提取最大项 2^{-n}, 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2}\left(1+(\dfrac{2}{3})^n+(\dfrac{2}{5})^n\right)^{\frac{1}{n}}$

$=\dfrac{1}{2}\cdot 1^0=\dfrac{1}{2}$.

(注: 也可用夹逼定理求解.)

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)^n$.

解: 原式 $=\exp\left\{\lim\limits_{n\to\infty}n\ln\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)\right\}$

$=\exp\left\{\lim\limits_{n\to\infty}n\cdot\left(-\dfrac{1}{n^2}\right)\right\}=e^0=1$.

(注: 也可利用重要极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)^{n^2}=e^{-1}$, 原式 $=\left(e^{-1}\right)^{\lim_{n\to\infty}1/n}=e^0=1$.)

4. $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{\sqrt{x}-1+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x^3-1}}$.

解: $\sqrt{x}-1=\dfrac{x-1}{\sqrt{x}+1}$, 分母 $\sqrt{x^3-1}=\sqrt{x-1}\sqrt{x^2+x+1}$

原式 $=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}+1}+1}{\sqrt{x^2+x+1}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

5. $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{\sin^2x}-\dfrac{1}{\ln(1+x^2)}\right)$.

解: 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x^2)-\sin^2x}{\sin^2x\ln(1+x^2)}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(x^2-\frac{x^4}{2})-(x^2-\frac{x^4}{3})+o(x^4)}{x^4}=-\dfrac{1}{6}$.

(注: 通分后连续使用洛必达法则同样可以求解.)

6. $\lim\limits_{x\to\infty}x^2\left(e^{\frac{1}{x}}-1-\dfrac{1}{x}\right)$.

解: 令 $t=1/x$, 原式 $=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{e^t-1-t}{t^2}$

$=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\frac{1}{2}t^2+o(t^2)}{t^2}=\dfrac{1}{2}$.

(注: 洛必达法则求导两次同样可以求解.)

二. (10 分) 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=\dfrac{1}{2}$, 且 $a_{n+1}=a_n(1-a_n)$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty} na_n$.

解: 1. 先证 $a_n\to 0$. $a_{n+1}=a_n(1-a_n)<a_n$, 单调递减且有下界 0, 极限存在. 设极限为 l, 则 $l=l(1-l)$, 解得 $l=0$.

2. 求极限. $\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{1}{a_n(1-a_n)}=\dfrac{1}{a_n}+\dfrac{1}{1-a_n}$. 由 Stolz 定理有

$$\lim_{n\to\infty} na_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{1/a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1/a_{n+1}-1/a_n}=\lim_{n\to\infty}(1-a_n)=1.$$

三. (10 分) 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $x+y=e^{x-y}$ 确定, 求 y' 和 y'' (结果用 x 和 y 表示).

解: 对 x 求导有 $1+y'=e^{x-y}(1-y')$. 整理得 $y'=\dfrac{x+y-1}{x+y+1}$.

求二阶导数得

$$y''=\frac{(1+y')(x+y+1)-(x+y-1)(1+y')}{(x+y+1)^2}=\frac{2(1+y')}{(x+y+1)^2}=\frac{4(x+y)}{(x+y+1)^3}.$$

四. (15 分) 设函数 $f(x)=\begin{cases}e^x-2x-1, & x<0\\ x^2-3x+a, & x\geqslant 0\end{cases}$.

(1) 确定 a 使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续; 当 $a=1$ 时, 指出间断点类型.

解: $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=a$. 要使连续, 需 $a=0$. 当 $a=1$ 时, 为跳跃间断点.

(2) 令 $a=1$, 求方程 $f(x)=0$ 在区间 $[-1,3]$ 上的实根个数.

解: $x<0$ 时, $f'(x)=e^x-2<0$, $f(x)$ 严格递减. 又 $f(-1)=1/e+1>0$, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=0$, 故 $f(x)>0$ 恒成立, 无零点.

$x\geqslant 0$ 时, $f'(x)=2x-3$, 所以 $f(x)$ 在 $(0,1.5)$ 上严格递减, 在 $(1.5,3)$ 上严格递增.

因为 $f(0)=1>0, f(1.5)=-1.25<0$, 由零点定理及单调性知, 在 $(0,1.5)$ 内存在唯一零点;

同理, $f(1.5)<0, f(3)=1>0$, 由零点定理及单调性知, 在 $(1.5,3)$ 内存在唯一零点. 共两个实根.

(3) 令 $a=1$, 求 $f(x)$ 在区间 $[-1,3]$ 上的最大值和最小值.

解: 显然 $f(x)$ 在 $[-1,3]$ 上连续, 因此存在最大值和最小值. 求导得 $f'(x)=\begin{cases}e^x-2, & -1<x<0\\ 2x-3, & 0<x<3\end{cases}$.

当 $-1<x<0$ 时, $f'(x)<0$; 当 $0<x<3$ 时, 令 $f'(x)=0$ 得驻点 $x=1.5$.

比较端点、分段点和驻点处的函数值: $f(-1)=1/e+1$, $f(0)=1$, $f(1.5)=-1.25$, $f(3)=1$.

因此, 最大值为 $1/e+1$ (在 $x=-1$ 处取得), 最小值为 -1.25 (在 $x=1.5$ 处取得).

(注: 列表讨论单调性并比较极值和端点值, 同样可以求解.)

五. (15 分) 设函数 $f(x)=\ln(1+x)-x+\dfrac{1}{2}x^2$.

(1) 求 $f(x)$ 的二阶导数 $f''(x)$, 并写出 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的带 Peano 余项的 4 次 Maclaurin 公式.

解: $f'(x)=\dfrac{1}{1+x}-1+x$, $f''(x)=-\dfrac{1}{(1+x)^2}+1=\dfrac{x(x+2)}{(1+x)^2}$.

利用 $\ln(1+x)$ 的 Maclaurin 公式 $\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^4}{4}+o(x^4)$, 代入得

$f(x)=\left(x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^4}{4}\right)-x+\dfrac{1}{2}x^2=\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{4}x^4+o(x^4)$.

(注: 若逐次求导算出 $f'''(0)=2, f^{(4)}(0)=-6$ 后写出公式, 同样可以求解. 若先通分为 $f'(x)=\dfrac{x^2}{1+x}$ 再求导同样可以求解.)

(2) 设曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(t,f(t))$ 处的切线交 x 轴于点 $(u(t),0)$, 求 $u(t)$ 的表达式.

解: 切线: $y-f(t)=f'(t)(x-t)$. 令 $y=0$ 得 $u(t)=t-\dfrac{f(t)}{f'(t)}$.

(3) 计算极限 $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(u(t))}{t^3}$.

解: $u(t)=t-\dfrac{\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{4}t^4+o(t^4)}{t^2-t^3+o(t^3)}=\dfrac{2}{3}t-\dfrac{1}{12}t^2+o(t^2)$.

代入得 $f(u(t))=\dfrac{8}{81}t^3+o(t^3)$. 极限为 $\dfrac{8}{81}$.

(注: 若未提取主部直接硬算, 正确得出 8/81 同样正确.)

六. (8 分) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内二阶可导, $f''(x)>0$, $f(0)=0, f(1)=1$. 证明: 存在唯一 $x_0\in(0,1)$ 使 $f(x_0)=1-x_0$.

证明: 1. 存在性: 令 $F(x)=f(x)+x-1$. $F(0)=-1<0, F(1)=1>0$. 由零点定理, 存在 $x_0\in(0,1)$ 使 $F(x_0)=0$, 即 $f(x_0)=1-x_0$.

2. 唯一性:

方法 1(利用严格凸性定义): 因为 $F''(x)=f''(x)>0$, 所以 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上是严格凸函数. 假设 $F(x)$ 存在两个零点 $x_1<x_2$, 由 $F(0)=-1<0, F(1)=1>0$ 知 $0<x_1<x_2<1$. 将 x_1 写为 0 和 x_2 的凸组合: $x_1=\left(1-\dfrac{x_1}{x_2}\right)\cdot 0+\dfrac{x_1}{x_2}\cdot x_2$. 由严格凸性有 $F(x_1)<\left(1-\dfrac{x_1}{x_2}\right)F(0)+\dfrac{x_1}{x_2}F(x_2)=-\left(1-\dfrac{x_1}{x_2}\right)<0$, 这与 $F(x_1)=0$ 矛盾, 故唯一性成立.

方法 2(利用导数与罗尔定理): 因为 $F''(x)=f''(x)>0$, 所以 $F'(x)$ 在 $(0,1)$ 上严格递增. 假设 $F(x)$ 存在两个零点 $x_1<x_2$, 由罗尔定理, 存在 $\xi\in(x_1,x_2)$ 使 $F'(\xi)=0$. 因为 $F(0)=-1<0$ 且 $F(x_1)=0$, 故由拉格朗日中值定理知存在 $\eta\in(0,x_1)$ 使 $F'(\eta)=\dfrac{F(x_1)-F(0)}{x_1-0}=\dfrac{1}{x_1}>0$. 因为 $\eta<x_1<\xi$, 且 $F'(x)$ 严格递增, 所以 $F'(\eta)<F'(\xi)=0$. 这与 $F'(\eta)>0$ 矛盾. 故唯一性成立.

(注: 选用上述任一方法证明唯一性, 只要逻辑严密均可.)

七. (6 分) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 且满足 $f(0)=0, f(1)=1$. 证明: 对任意正整数 n, 存在互不相同的 $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n\in(0,1)$, 使得 $\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{f'(\xi_i)}=n$.

证明: 1. 当 $n=1$ 时, 由拉格朗日中值定理, 存在 $\xi_1\in(0,1)$ 使得 $f'(\xi_1)=1$, 此时 $\sum\limits_{i=1}^{1}\dfrac{1}{f'(\xi_i)}=1$, 结论成立.

下面设 $n\geqslant 2$. 令 $x_0=0, x_n=1$. 依次对 $i=n-1,n-2,\ldots,1$ 应用连续函数的介值定理. 因为 $f(x_0)=0<\dfrac{i}{n}<f(x_{i+1})=\dfrac{i+1}{n}$, 所以在 (x_0,x_{i+1}) 内存在 x_i, 使得 $f(x_i)=\dfrac{i}{n}$.

由 $x_0 < x_i < x_{i+1}$ 归纳可知, 存在 $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1$, 且 $f(x_i) = \dfrac{i}{n}$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$.

2. 对每个子区间 $[x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, 由拉格朗日中值定理, 存在 $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$, 使得

$$f'(\xi_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = \frac{\frac{i}{n} - \frac{i-1}{n}}{x_i - x_{i-1}} = \frac{1}{n(x_i - x_{i-1})}.$$

因为 x_i 严格递增, 所以 $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ 互不相同.

3. 将 $f'(\xi_i)$ 的表达式取倒数得 $\dfrac{1}{f'(\xi_i)} = n(x_i - x_{i-1})$. 对 i 从 1 到 n 求和得

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{f'(\xi_i)} = \sum_{i=1}^{n} n(x_i - x_{i-1}) = n\left[(x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + \cdots + (x_n - x_{n-1})\right] = n(x_n - x_0) = n,$$

即结论成立. □