数学分析专题练习
T1–T7：题目与详解

整理说明

本讲义依据手写图片整理。每题先给出完整题面，再给出证明或计算。根据补充要求，第三题只讨论 $|x|<1$；第五题通过计算各项的原函数并证明所得函数项级数一致收敛，说明逐项积分的合法性；第六题第一问改为函数列的一致有界性；第七题按指定的积分放缩不等式证明。

1　T1 正项级数与相邻项几何平均数

题目. 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n>0$（$n\ge 1$），且正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛。证明级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_n a_{n+1}}$$

也收敛。并说明反向命题不成立，即 $\sum\sqrt{a_n a_{n+1}}$ 收敛不能推出 $\sum a_n$ 收敛。

证明.

由算术–几何平均不等式，对每个 $n\ge 1$，

$$\sqrt{a_n a_{n+1}}\le\frac{a_n+a_{n+1}}{2}.$$

因此，对任意 $N\ge 1$，

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N}\sqrt{a_n a_{n+1}}&\le\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}(a_n+a_{n+1})\\&=\frac{a_1+a_{N+1}}{2}+\sum_{n=2}^{N}a_n.\end{aligned}$$

右端不超过 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$。故左端部分和单调递增且有上界，从而

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_n a_{n+1}}$$

收敛。

反向命题不成立。取

$$a_{2k-1}=\frac{1}{k^3},\qquad a_{2k}=\frac{1}{k}\quad(k\ge 1).$$

则

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n\ge\sum_{k=1}^{\infty}a_{2k}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}=+\infty.$$

另一方面，

$$\sqrt{a_{2k-1}a_{2k}}=\frac{1}{k^2},$$

$$\sqrt{a_{2k}a_{2k+1}}=\frac{1}{\sqrt{k}(k+1)^{3/2}}\le\frac{1}{k^2}.$$

故

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_na_{n+1}}\le 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}<\infty.$$

反向命题不成立。

2 T2 交错级数的敛散性

题目. 对参数 $\alpha>0$，讨论级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\sqrt[n]{n}-1\right)^{\alpha}$$

的敛散性，并判断它何时绝对收敛、何时条件收敛。

解答.

令

$$b_n=(n^{1/n}-1)^{\alpha}.$$

由

$$n^{1/n}=\exp\left(\frac{\ln n}{n}\right),\qquad e^t-1\sim t\quad(t\to 0),$$

可得

$$n^{1/n}-1\sim\frac{\ln n}{n},$$

从而

$$b_n \sim \frac{(\ln n)^\alpha}{n^\alpha}.$$

因此 $b_n \to 0$。

又因为函数

$$x \mapsto \frac{\ln x}{x}$$

在 $x > e$ 时严格递减，所以 $n^{1/n}$，进而 b_n，从充分大的 n 起递减。

由莱布尼茨判别法，原交错级数对每个 $\alpha > 0$ 均收敛。

再考察绝对值级数。由渐近等价，

$$\sum b_n$$

与

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\ln n)^\alpha}{n^\alpha}$$

具有相同的敛散性。

- 若 $\alpha > 1$，由积分判别法，

$$\int_2^{\infty} \frac{(\ln x)^\alpha}{x^\alpha}\, dx$$

收敛，故绝对值级数收敛。

- 若 $\alpha = 1$，则

$$\int_2^{\infty} \frac{\ln x}{x}\, dx = +\infty,$$

故绝对值级数发散。

- 若 $0 < \alpha < 1$，当 n 充分大时 $(\ln n)^\alpha \geq 1$，于是

$$\frac{(\ln n)^\alpha}{n^\alpha} \geq \frac{1}{n^\alpha}.$$

由于 $\sum 1/n^\alpha$ 发散，绝对值级数也发散。

综上，

$$\boxed{\begin{cases} \alpha > 1, & \text{绝对收敛,} \\ 0 < \alpha \leq 1, & \text{条件收敛.} \end{cases}}$$

3 T3 反正切复合函数的幂级数展开

题目. 设

$$f(x)=\arctan\frac{2x}{1-x^2},\qquad -1<x<1,$$

其中 arctan 取主值。求 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的麦克劳林展开。

解答.

令

$$\theta=\arctan x.$$

当 $|x|<1$ 时，

$$-\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{4},$$

所以

$$-\frac{\pi}{2}<2\theta<\frac{\pi}{2}.$$

由正切二倍角公式，

$$\tan(2\theta)=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\frac{2x}{1-x^2}.$$

由于 2θ 位于主值反正切的值域内，故

$$f(x)=2\arctan x.$$

利用反正切的麦克劳林展开，得到

$$\boxed{\begin{aligned}f(x)&=2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}x^{2k+1}\\&=2x-\frac{2x^3}{3}+\frac{2x^5}{5}-\cdots,\qquad |x|<1.\end{aligned}}$$

4 T4 幂级数的收敛区间与和函数

题目. 求幂级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(2n-1)}x^{2n}$$

的收敛区间，并求其和函数。

解答.

系数满足

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n(2n-1)}\right)^{1/(2n)}=1,$$

故幂级数关于 x 的收敛半径为 $R=1$。

当 $|x|\le 1$ 时，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|x|^{2n}}{n(2n-1)}\le\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(2n-1)}<\infty.$$

所以两个端点也绝对收敛，收敛区间为

$$[-1,1].$$

下面求和函数。

部分分式分解得

$$\frac{1}{n(2n-1)}=-\frac{1}{n}+\frac{2}{2n-1}.$$

当 $|x|<1$ 时，

$$\begin{aligned}S(x)&=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{n}\\&\quad+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{2n-1}\\&=\ln(1+x^2)-2x\arctan x.\end{aligned}$$

由于原级数在 $x=\pm1$ 处也绝对收敛，且右端函数在 $[-1,1]$ 上连续，同一表达式可延拓到端点。因此

$$\boxed{S(x)=\ln(1+x^2)-2x\arctan x,\quad -1\le x\le 1.}$$

特别地，

$$S(1)=S(-1)=\ln 2-\frac{\pi}{2}.$$

5 T5 非一致收敛级数的逐项积分

题目. 对 $0<x<1$，定义

$$S_1(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n}\ln x.$$

(1) 证明该级数在 $(0,1)$ 上逐点收敛但不一致收敛；

（2）计算广义积分

$$\int_0^1 S_1(x)\,dx,$$

并通过计算各项的原函数、证明所得函数项级数一致收敛，说明逐项积分的合法性。

（1）逐点收敛但不一致收敛

固定 $x \in (0,1)$，由几何级数可知

$$\begin{aligned} S_1(x) &= \ln x \sum_{n=1}^{\infty} x^{2n} \\ &= \frac{x^2 \ln x}{1-x^2}. \end{aligned}$$

其部分和余项为

$$\begin{aligned} R_N(x) &= \sum_{n=N+1}^{\infty} x^{2n} \ln x \\ &= \frac{x^{2N+2} \ln x}{1-x^2}. \end{aligned}$$

对任意固定的 N，

$$\lim_{x \to 1^-} |R_N(x)| = \frac{1}{2}.$$

因此

$$\sup_{0<x<1} |R_N(x)| \geq \frac{1}{2},$$

余项不可能一致趋于零，故原级数不一致收敛。

（2）逐项积分及积分值

对每个 $n \geq 1$，先计算

$$\begin{aligned} F_n(x) &= \int_0^x t^{2n} \ln t \, dt \\ &= \frac{x^{2n+1} \ln x}{2n+1} - \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)^2}, \qquad 0 < x \leq 1. \end{aligned}$$

并定义

$$F_n(0) = 0.$$

由于 $t^{2n} \ln t \leq 0$，对所有 $x \in [0,1]$ 有

$$\begin{aligned}|F_n(x)| &= \int_0^x t^{2n}(-\ln t)\,dt \\ &\le \int_0^1 t^{2n}(-\ln t)\,dt \\ &= \frac{1}{(2n+1)^2}.\end{aligned}$$

而

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} < \infty.$$

由 Weierstrass 判别法，函数项级数

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} F_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x t^{2n} \ln t\,dt}$$

在 $[0,1]$ 上一致收敛。

特别地，在 $x=1$ 处，逐项积分所得级数收敛。

为严格说明该极限确实等于原函数项级数之和的积分，记

$$S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} x^{2n} \ln x.$$

对 $0<x<1$，有

$$|S_N(x)| \le \frac{-x^2 \ln x}{1-x^2} =: G(x).$$

其中 G 在 $(0,1)$ 上可积。事实上，

$$\lim_{x\to 0^+} G(x) = 0, \qquad \lim_{x\to 1^-} G(x) = \frac{1}{2},$$

故可在端点连续延拓。

又

$$S_N(x) \longrightarrow S_1(x)$$

对每个 $x \in (0,1)$ 成立。

由控制收敛定理，

$$\begin{aligned}\int_0^1 S_1(x)\,dx &= \lim_{N\to\infty} \int_0^1 S_N(x)\,dx \\ &= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \int_0^1 x^{2n} \ln x\,dx \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} F_n(1).\end{aligned}$$

因此逐项积分成立。

最后，

$$F_n(1) = -\frac{1}{(2n+1)^2},$$

从而

$$\begin{aligned}\int_0^1 S_1(x)\,dx &= -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\\ &= -\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}-1\right)\\ &= -\left(\frac{\pi^2}{8}-1\right).\end{aligned}$$

故

$$\boxed{\int_0^1 S_1(x)\,dx = 1-\frac{\pi^2}{8}.}$$

6 T6 函数列的一致有界性与连续函数复合

题目（严谨表述）.

设函数列 $\{f_n\}$ 中每个 f_n 都在紧区间 $[-a,a]$ 上连续，并且

$$f_n \longrightarrow f$$

在 $[-a,a]$ 上一致收敛。

(1) 证明函数列 $\{f_n\}$ 一致有界，即存在常数 $M>0$，使得对任意 $n\geq 1$ 及 $x\in[-a,a]$，均有

$$|f_n(x)|\leq M.$$

(2) 设 g 在包含所有 $f_n(x)$ 和 $f(x)$ 取值的某个闭有界区间 $[-M,M]$ 上连续。证明

$$g(f_n(x)) \longrightarrow g(f(x))$$

在 $[-a,a]$ 上一致收敛。

(1) 函数列的一致有界性

因为 $f_n\to f$ 一致收敛，且每个 f_n 连续，所以极限函数 f 连续。

由闭区间 $[-a,a]$ 的紧致性，存在常数 $C>0$，使得

$$|f(x)|\leq C,\qquad x\in[-a,a].$$

由一致收敛，存在 N，使得当 $n \geq N$ 时，对所有 $x \in [-a, a]$ 都有

$$|f_n(x) - f(x)| < 1.$$

于是当 $n \geq N$ 时，

$$\begin{aligned} |f_n(x)| &\leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x)| \\ &< C + 1. \end{aligned}$$

另一方面，$f_1, \ldots, f_{N-1}$ 均在紧区间上连续，因而各自有界。

取一个常数 M，使其同时大于 $C+1$ 以及这有限多个函数的上界，即得

$$\boxed{|f_n(x)| \leq M, \qquad \forall n \geq 1,\ x \in [-a, a].}$$

这说明函数列一致有界。

并且令 $n \to \infty$，也有

$$|f(x)| \leq M.$$

(2) 连续函数复合后仍一致收敛

因为 g 在紧区间 $[-M, M]$ 上连续，所以 g 在该区间上一致连续。

给定任意 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，使得对任意 $u, v \in [-M, M]$，

$$|u - v| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |g(u) - g(v)| < \varepsilon.$$

又由 $f_n \to f$ 一致收敛，存在 N_1，使得当 $n \geq N_1$ 时，对所有 $x \in [-a, a]$，

$$|f_n(x) - f(x)| < \delta.$$

因此对所有 $n \geq N_1$ 及 $x \in [-a, a]$，

$$|g(f_n(x)) - g(f(x))| < \varepsilon.$$

故

$$\boxed{\sup_{x \in [-a,a]} |g(f_n(x)) - g(f(x))| \longrightarrow 0.}$$

即

$$g \circ f_n$$

一致收敛于

$$g \circ f.$$

7 T7 递增数列有界性与级数收敛的等价关系

题目.

设数列 $\{a_n\}$ 严格递增且 $a_1 > 1$。证明

$$\{a_n\} \text{ 有界} \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{a_n \ln a_{n+1}} \text{ 收敛.}$$

证明.

记

$$u_n = \frac{a_{n+1} - a_n}{a_n \ln a_{n+1}} > 0.$$

充分性：数列有界推出级数收敛

若 $\{a_n\}$ 有界，设 $a_n \le A$。

由于 $a_n \ge a_1 > 1$，

$$0 < u_n \le \frac{a_{n+1} - a_n}{a_1 \ln a_1}.$$

于是

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{N} u_n &\le \frac{1}{a_1 \ln a_1} \sum_{n=1}^{N} (a_{n+1} - a_n) \\ &= \frac{a_{N+1} - a_1}{a_1 \ln a_1} \\ &\le \frac{A - a_1}{a_1 \ln a_1}. \end{aligned}$$

部分和单调递增且有上界，故级数收敛。

必要性：数列无界推出级数发散

反设 $\{a_n\}$ 无界。

由于 a_n 严格递增，必有

$$a_n \to +\infty.$$

利用积分放缩，

$$\begin{aligned}\ln a_{n+1} - \ln a_n &= \int_{a_n}^{a_{n+1}} \frac{1}{x}\,dx \\ &< \frac{a_{n+1}-a_n}{a_n},\end{aligned}$$

因为在积分区间内

$$\frac{1}{x} \le \frac{1}{a_n},$$

且除左端点外严格小于 $\frac{1}{a_n}$。

两边除以正数 $\ln a_{n+1}$，得到

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{a_{n+1}-a_n}{a_n \ln a_{n+1}} &> \frac{\ln a_{n+1} - \ln a_n}{\ln a_{n+1}} \\ &= 1 - \frac{\ln a_n}{\ln a_{n+1}}.\end{aligned}}$$

令

$$b_n = \ln a_n,$$

则 $b_n > 0$ 严格递增且

$$b_n \to +\infty.$$

记

$$q_n = 1 - \frac{b_n}{b_{n+1}}, \qquad 0 < q_n < 1.$$

下面证明

$$\sum_{n=1}^{\infty} q_n$$

发散。

若反设 $\sum q_n$ 收敛，则

$$q_n \to 0.$$

故存在 n_0，使得当 $n \ge n_0$ 时，

$$0 < q_n \le \frac{1}{2}.$$

利用不等式

$$-\ln(1-t) \le 2t, \qquad 0 \le t \le \frac{1}{2},$$

可得对任意 $N \geq n_0$，

$$\begin{aligned}
\ln \frac{b_{N+1}}{b_{n_0}} &= \sum_{n=n_0}^{N} \ln \frac{b_{n+1}}{b_n} \\
&= \sum_{n=n_0}^{N} -\ln(1-q_n) \\
&\leq 2 \sum_{n=n_0}^{N} q_n \\
&\leq 2 \sum_{n=n_0}^{\infty} q_n \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

右端与 N 无关，而左端因

$$b_{N+1} \to +\infty$$

而趋于 $+\infty$，矛盾。

因此

$$\sum_{n=1}^{\infty} q_n$$

发散。

又由前面的积分放缩有

$$u_n > q_n,$$

比较判别法推出

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

发散。

综上，

$$\boxed{\{a_n\} \text{ 有界} \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{a_n \ln a_{n+1}} \text{ 收敛.}}$$