2026 年数学分析 A2 期中考试

一、

1. $e^z - xyz = 0$ 确定 $z = z(x,y)$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$

2. $f(x,y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$，求 Jf，$J(f^{-1})$

3. 求 $\cos^2(x^2+y^2)$ 在 $(0,0)$ 处的 Taylor 展开式（Peano 余项）

二、设 $f(x,y) = |x-y|\varphi(x,y)$，$\varphi(x,y)$ 在 $(0,0)$ 的某个邻域内连续。
(1) 当且仅当 φ 满足什么条件时，$f'_x(0,0)$ 和 $f'_y(0,0)$ 存在

(2) 当且仅当 φ 满足什么条件时，f 在 $(0,0)$ 处可微。

三、设 $u = f(x,y)$ 有二阶偏导，且 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$，证明 $v = f(x^2-y^2, 2xy)$ 满足 $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$

四、设 $F(x,y,z)$、$G(x,y,z)$ 有连续偏导，且 $\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,z)} \neq 0$，曲线 $\begin{cases} F(x,y,z) = 0 \\ G(x,y,z) = 0 \end{cases}$ 过点 (x_0, y_0, z_0)，记其在 xy 平面上的投影曲线为 L，求 L 过点 (x_0, y_0) 的切线方程

五、求 $2x^2+2y^2+z^2=1$ 上一点，使 $F(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ 在方向 $l = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}$ 上的方向导数最大

六、记 $\rho(A,B) = \inf\{|p-q| \mid p \in A, q \in B\}$，若 A 为紧集，B 为闭集，$A \cap B = \emptyset$。证明 $\rho(A,B) > 0$

七、$D \subset \mathbb{R}^n$, D 为有界闭集，映射 $f: D \to D$ 满足对于任意 $x \neq y \in D$，有 $|f(x) - f(y)| < |x-y|$，证明存在 $x_0 \in D$，$f(x_0) = x_0$