数学分析A2期末

参考解答

1. 交换积分次序

(1)

$$I=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}x\int_x^{2\pi}\frac{x\sin^2 y}{y^2}\,\mathrm{d}y.$$

积分区域为

$$0\le x\le y\le 2\pi.$$

交换积分次序，得

$$\begin{aligned}I&=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}y\int_0^{y}\frac{x\sin^2 y}{y^2}\,\mathrm{d}x\\&=\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2 y}{y^2}\cdot\frac{y^2}{2}\,\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\sin^2 y\,\mathrm{d}y=\frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

故

$$\boxed{I=\frac{\pi}{2}}.$$

(2)

$$I=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x\mathrm{d}y\int_0^y e^{(1-z)^3}\,\mathrm{d}z.$$

积分区域为

$$0\le z\le y\le x\le 1.$$

先固定 z，则 $z\le y\le 1$，$y\le x\le 1$，故

$$\begin{aligned}I&=\int_0^1 e^{(1-z)^3}\left(\int_z^1\int_y^1\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}z\\&=\int_0^1 e^{(1-z)^3}\left(\int_z^1(1-y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}z\\&=\frac{1}{2}\int_0^1(1-z)^2e^{(1-z)^3}\,\mathrm{d}z.\end{aligned}$$

令 $u=(1-z)^3$，则 $\mathrm{d}u=-3(1-z)^2\,\mathrm{d}z$，于是

$$I=\frac{1}{6}\int_0^1 e^u\,\mathrm{d}u=\frac{e-1}{6}.$$

故
$$\boxed{I=\frac{e-1}{6}}.$$

2. 极坐标积分

题中区域为
$$D=\left\{(r,\theta):0\le r\le \frac{1}{\cos\theta},\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{4}\right\}.$$
所求积分为
$$I=\int_0^{\pi/4}\int_0^{\sec\theta} r^2\sin\theta\sqrt{1-r^2\cos(2\theta)}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta.$$
令
$$x=r\cos\theta,\qquad y=r\sin\theta.$$
则
$$r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta=y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,\qquad r^2\cos(2\theta)=x^2-y^2.$$
又由 $0\le\theta\le\pi/4$ 与 $0\le r\le\sec\theta$ 可知，积分区域变为
$$0\le y\le x\le 1.$$
因此
$$\begin{aligned}I&=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x y\sqrt{1-x^2+y^2}\,\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{3}\int_0^1\left[\left(1-x^2+y^2\right)^{3/2}\right]_{y=0}^{y=x}\,\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{3}\int_0^1\left(1-(1-x^2)^{3/2}\right)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$
再令 $x=\sin t$，则
$$\int_0^1(1-x^2)^{3/2}\,\mathrm{d}x=\int_0^{\pi/2}\cos^4t\,\mathrm{d}t=\frac{3\pi}{16}.$$
故
$$I=\frac{1}{3}\left(1-\frac{3\pi}{16}\right)=\frac{1}{3}-\frac{\pi}{16}.$$
即
$$\boxed{I=\frac{1}{3}-\frac{\pi}{16}}.$$

3. 椭球与圆锥所围体积

曲面为
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2},\quad z\ge 0.$$
作线性变换
$$X=\frac{x}{a},\qquad Y=\frac{y}{b},\qquad Z=\frac{z}{c}.$$
Jacobian 为 abc，即
$$\mathrm{d}V=abc\,\mathrm{d}X\,\mathrm{d}Y\,\mathrm{d}Z.$$

变换后两曲面为

$$X^2+Y^2+Z^2=1,\qquad X^2+Y^2=Z^2,\quad Z\ge 0.$$

在球坐标中，锥面对应 $\varphi=\pi/4$。故所围区域可写为

$$0\le\rho\le 1,\qquad 0\le\varphi\le\frac{\pi}{4},\qquad 0\le\theta\le 2\pi.$$

于是体积

$$\begin{aligned}V&=abc\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_0^1\rho^2\sin\varphi\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta\\&=abc\cdot 2\pi\cdot\frac{1}{3}\left(1-\cos\frac{\pi}{4}\right).\end{aligned}$$

因此

$$\boxed{V=\frac{2\pi abc}{3}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}.$$

4. 势函数存在条件

设

$$\mathbf{V}=(P,Q,R)$$

其中

$$P=x^2+5cy+3yz,\qquad Q=5x+3czx-2,\qquad R=(c+2)xy-4z^2.$$

若 $\mathbf{V}$ 有势函数，则

$$P_y=Q_x,\qquad P_z=R_x,\qquad Q_z=R_y.$$

计算得

$$P_y=5c+3z,\qquad Q_x=5+3cz,$$

从而比较常数项和 z 的系数，得 $c=1$。其余两组条件为

$$P_z=3y,\qquad R_x=(c+2)y,$$

以及

$$Q_z=3cx,\qquad R_y=(c+2)x,$$

同样给出 $c=1$。故

$$\boxed{c=1}.$$

此时

$$P=x^2+5y+3yz,\quad Q=5x+3xz-2,\quad R=3xy-4z^2.$$

设势函数为 ϕ，由 $\phi_x=P$ 得

$$\phi=\frac{x^3}{3}+5xy+3xyz+g(y,z).$$

再由 $\phi_y=Q$ 得

$$5x+3xz+g_y=5x+3xz-2,$$

故

$$g(y,z)=-2y+h(z).$$

最后由 $\phi_z=R$ 得

$$3xy+h'(z)=3xy-4z^2,$$

故

$$h(z) = -\frac{4}{3}z^3 + C.$$

因此可取势函数

$$\boxed{\phi(x,y,z) = \frac{x^3}{3} + 5xy + 3xyz - 2y - \frac{4}{3}z^3 + C}.$$

5. Green 公式求面积

曲线参数方程为

$$x = a\cos^3 t, \qquad y = a\sin^3 t, \qquad 0 \le t \le 2\pi.$$

该曲线为正向绕行的星形线。由 Green 公式，曲线围成面积为

$$A = \oint_C x\,\mathrm{d}y.$$

又

$$\mathrm{d}y = 3a\sin^2 t\cos t\,\mathrm{d}t,$$

故

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{2\pi} a\cos^3 t \cdot 3a\sin^2 t\cos t\,\mathrm{d}t \\ &= 3a^2\int_0^{2\pi} \sin^2 t\cos^4 t\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

利用对称性或 Beta 积分可得

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 t\cos^4 t\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{8}.$$

于是

$$\boxed{A = \frac{3\pi a^2}{8}}.$$

6. 重积分降维

设

$$I = \int_0^1 \mathrm{d}x_1 \int_0^{x_1} \mathrm{d}x_2 \cdots \int_0^{x_{n-1}} f(x_n)\,\mathrm{d}x_n.$$

对应积分区域为

$$0 \le x_n \le x_{n-1} \le \cdots \le x_1 \le 1.$$

固定 $x_n = t$，则剩余变量满足

$$t \le x_{n-1} \le \cdots \le x_1 \le 1.$$

这是一个 $(n-1)$ 维单纯形，其体积为

$$\frac{(1-t)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

因此

$$\boxed{I = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^1 (1-t)^{n-1} f(t)\,\mathrm{d}t}.$$

7. 分部积分计算

设

$$\Omega = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : |\mathbf{x}| \le 1\}, \qquad \Delta f = |\mathbf{x}|.$$

要求

$$I = \iiint_\Omega \mathbf{x} \cdot \nabla f \, \mathrm{d}V.$$

取

$$\psi(\mathbf{x}) = \frac{|\mathbf{x}|^2 - 1}{2}.$$

则

$$\nabla\psi = \mathbf{x}, \qquad \psi\big|_{\partial\Omega} = 0.$$

于是

$$I = \iiint_\Omega \nabla\psi \cdot \nabla f \, \mathrm{d}V.$$

由 Green 第一公式,

$$\iiint_\Omega \nabla\psi \cdot \nabla f \, \mathrm{d}V = \iint_{\partial\Omega} \psi \frac{\partial f}{\partial n} \, \mathrm{d}S - \iiint_\Omega \psi \Delta f \, \mathrm{d}V.$$

因 $\psi|_{\partial\Omega} = 0$，边界项为 0，故

$$\begin{aligned} I &= -\iiint_\Omega \frac{|\mathbf{x}|^2 - 1}{2} |\mathbf{x}| \, \mathrm{d}V \\ &= \frac{1}{2} \iiint_\Omega (1 - |\mathbf{x}|^2)|\mathbf{x}| \, \mathrm{d}V. \end{aligned}$$

令 $r = |\mathbf{x}|$，用球坐标得

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \int_0^1 (1 - r^2) r \cdot 4\pi r^2 \, \mathrm{d}r \\ &= 2\pi \int_0^1 (r^3 - r^5) \, \mathrm{d}r \\ &= 2\pi \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6} \right) = \frac{\pi}{6}. \end{aligned}$$

故

$$\boxed{I = \frac{\pi}{6}}.$$

8. 构造 0-1 简单函数

设 f 在 $[0,1]^2$ 上 Riemann 可积，且 $0 \le f \le 1$。给定 $\varepsilon > 0$，取正整数 N，将 $[0,1]^2$ 等分为 N^2 个边长为 $1/N$ 的小正方形 Q_{ij}。记

$$m_{ij} = \int_{Q_{ij}} f.$$

由于 $0 \le f \le 1$，有

$$0 \le m_{ij} \le |Q_{ij}| = \frac{1}{N^2}.$$

故可在每个 Q_{ij} 中取一个小矩形 E_{ij}，使

$$|E_{ij}| = m_{ij}.$$

定义

$$g = \chi_{\bigcup_{i,j} E_{ij}}.$$

则 g 只取 $0,1$，且

$$\int_{Q_{ij}} g = |E_{ij}| = m_{ij} = \int_{Q_{ij}} f.$$

对所有小正方形求和，得

$$\boxed{\int_{[0,1]^2} g = \int_{[0,1]^2} f}.$$

下证局部矩形上的误差估计。任取

$$D = [\alpha, \beta] \times [\gamma, \delta] \subset [0,1]^2.$$

完全落在 D 内部的小正方形上，f 与 g 的积分相等；误差只可能来自与 ∂D 相交的小正方形。此类小正方形的并的面积不超过

$$\frac{4}{N} + \frac{4}{N^2}.$$

又因 $|f-g| \le 1$，故

$$\left| \int_D f - \int_D g \right| \le \frac{4}{N} + \frac{4}{N^2}.$$

取 N 充分大，使

$$\frac{4}{N} + \frac{4}{N^2} < \varepsilon,$$

即得

$$\boxed{\left| \int_D f - \int_D g \right| < \varepsilon}.$$