中国科学技术大学 2026 年

数学分析A1　期中

本试卷共 10 题，每题 10 分. 全卷满分 100 分. 考试用时 120 分钟.

1. $A \subseteq \mathbb{R}$. 设 $d(x) = \inf\limits_{a \in A} |x - a|$.

   （1）（6 分）求证 $\forall x, y \in \mathbb{R}$，$|d(x) - d(y)| \leqslant |x - y|$.

   （2）（4 分）求证 $\forall x$, $d(x) = 0$ 的充要条件为存在数列 $(a_n)_n$, $a_n \in A$, $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = x$.

2. 数列 $\{x_n\}$ 有 $\limsup\limits_{n \to \infty} x_n = \alpha$, $\liminf\limits_{n \to \infty} x_n = \beta$. 求证：$\limsup\limits_{n \to \infty} |x_n| = \max\{\alpha, -\beta\}$.

3. 数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_1 = 0$, $x_{n+1} = x_n + \dfrac{(1 - x_n)^2}{2}$.

   （1） 求证：x_n 收敛且单调增，收敛于 1.

   （2） 求 $\lim\limits_{n \to \infty} n(1 - x_n)$.

4. 设 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 一致连续，求证 $f(x)$ 在 0 处右极限和 1 处左极限都存在且有限。进而 f 在 $[0, 1]$ 有唯一连续延拓.

5. f 在 $[0, 1]$ 连续. 记

$$M = \max_{x \in [0,1]} f(x), \quad m = \min_{x \in [0,1]} f(x).$$

并令 $G(x) = \max\limits_{t \in [0,1]} |f(t) - f(x)|$.

   （1） 证明 $G(x)$ 连续.

   （2） 证明 $\min\limits_{x \in [0,1]} G(x) = \dfrac{M + m}{2}$.

6. f 连续. 若 $\forall n \in \mathbb{N}^+$,

$$f(x) = f\left(x + \frac{1}{n}\right) \quad \forall x \in \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right].$$

求证 f 是常函数.

   若只对 $n = 2$ 成立上式，可以推出 f 是常函数吗？

7. 函数

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

求证：f 在 $\mathbb{R}$ 可导，但 f' 在 0 不连续.

8. 求 $y = \dfrac{\ln x}{x}$ 的 n 阶导.

9. f 连续且一阶可导，$f(0)=f(1)=0$. 求证：存在 $c\in(0,1)$ 使得 $f'(c)+\dfrac{f(c)}{1+c}=0$.

   是否存在 $d\in(0,1)$ 使得 $f'(d)+\dfrac{f(d)}{2+d}=0$?

10. 对于任意的 $x\in(0,1)$

$$\lim_{y\to 0}\frac{f(x+y)+f(x-y)-2f(y)}{y}$$

总存在. 求证：任给 $0<a<b<1$，在 (a,b) 上总有一点可导.

中国科学技术大学

2026–2027 学年第一学期期中考试

数学分析 A1 参考答案与评分标准

2026 年 11 月 21 日

阅卷说明

1. 全卷共 10 题，每题 10 分，满分 100 分。
2. 按解答中正确完成的步骤给分。符合试卷要求的其他解法，按相应论证给分。每个评分点只计一次。
3. 仅写题目所求结果时，按解答中明确标出的结论分给分。

一、(10 分)

设 $A \subseteq \mathbb{R}$ 为非空集合。对 $x \in \mathbb{R}$，定义 $d(x) = \inf_{a \in A} |x - a|$。证明：

(1) 对任意 $x, y \in \mathbb{R}$，有 $|d(x) - d(y)| \le |x - y|$。(6 分)

(2) 对任意 $x \in \mathbb{R}$，$d(x) = 0$ 当且仅当存在数列 $(a_n)_{n \ge 1}$，使得 $a_n \in A$（$n \ge 1$）且 $a_n \to x$。(4 分)

参考答案与评分

第（1）问，共 6 分

(2 分) 对任意 $a \in A$，由下确界的定义及三角不等式，

$$d(x) \le |x - a| \le |x - y| + |y - a|.$$

(2 分) 对右端关于 $a \in A$ 取下确界，得 $d(x) - d(y) \le |x - y|$。

(1 分) 交换 x 与 y，得 $d(y) - d(x) \le |x - y|$。

(1 分) 合并两式，得 $|d(x) - d(y)| \le |x - y|$。

第（2）问，共 4 分

(1 分) 若 $d(x) = 0$, 由下确界的定义, 对每个 $n \ge 1$, 可取 $a_n \in A$ 使 $|x - a_n| < 1/n$。

(1 分) 由 $1/n \to 0$，得 $a_n \to x$。

(1 分) 反之，若 $a_n \in A$ 且 $a_n \to x$，则 $0 \le d(x) \le |x - a_n|$。

(1 分) 令 $n \to \infty$，得 $d(x) = 0$。

二、(10 分)

设 $(a_n)_{n\geq 1}$ 为有界实数列，记 $\alpha = \limsup_{n\to\infty} a_n$，$\beta = \liminf_{n\to\infty} a_n$。
请从上、下极限的定义出发证明

$$\limsup_{n\to\infty} |a_n| = \max\{\alpha, -\beta\}.$$

参考答案与评分

(2 分) 对每个正整数 N，设

$$S_N = \sup_{n\geq N} a_n, \qquad I_N = \inf_{n\geq N} a_n, \qquad T_N = \sup_{n\geq N} |a_n|.$$

(2 分) 对每个 $n \geq N$，有 $a_n \leq S_N$ 且 $-a_n \leq -I_N$，故 $|a_n| = \max\{a_n, -a_n\} \leq \max\{S_N, -I_N\}$。取上确界，得 $T_N \leq \max\{S_N, -I_N\}$。

(1 分) 由 $|a_n| \geq a_n$，取上确界得 $T_N \geq S_N$。

(1 分) 由 $|a_n| \geq -a_n$，取上确界得 $T_N \geq \sup_{n\geq N}(-a_n) = -I_N$。

(2 分) 根据上、下极限的定义，$S_N \to \alpha$，$I_N \to \beta$（合计 1 分），且 $T_N \to \limsup_{n\to\infty} |a_n|$（1 分）。

(2 分) 由以上不等式，$T_N = \max\{S_N, -I_N\}$。由 $\max\{u, v\} = (u+v+|u-v|)/2$ 可知二元最大值函数连续，因而可以令 $N \to \infty$ (1 分)，得到 $\limsup_{n\to\infty} |a_n| = \max\{\alpha, -\beta\}$ (1 分)。

三、(10 分)

令 $x_1 = 0$，对每个整数 $n \geq 1$，递推定义

$$x_{n+1} = x_n + \frac{(1 - x_n)^2}{2}.$$

证明 $x_n \uparrow 1$，并求 $\lim\limits_{n\to\infty} n(1 - x_n)$。

参考答案与评分

(2 分) 令 $u_n = 1 - x_n$，则 $u_1 = 1$，且

$$u_{n+1} = u_n \left(1 - \frac{u_n}{2}\right).$$

(2 分) 若 $0 < u_n \leq 1$，则 $1/2 \leq 1 - u_n/2 < 1$。因此归纳可得 $u_n > 0$（1 分）且 $u_{n+1} < u_n$（1 分）。

(2 分) 由单调有界性，u_n 有极限 $\ell \geq 0$ (1 分)。对递推式取极限，得 $\ell = \ell(1 - \ell/2)$，故 $\ell = 0$，即 $x_n \uparrow 1$（1 分）。

(2 分) 由递推式算得倒数差（1 分），再用 $u_n \to 0$ 求其极限（1 分）：

$$\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} = \frac{1}{2 - u_n} \longrightarrow \frac{1}{2}.$$

(1 分) 对 $(1/u_n)/n$ 应用 Stolz 定理，得 $1/(nu_n) \to 1/2$。

(1 分) 结论分。取倒数，得 $\lim\limits_{n\to\infty} n(1 - x_n) = 2$。

四、(10 分)

设 $f\colon [0,1]\to\mathbb{R}$ 连续，且对每个整数 $n\ge 2$ 及每个 $x\in[0,1-1/n]$，均有

$$f(x+1/n)=f(x).$$

证明 f 为常值函数。若只要求上述等式在 $n=2$ 时对所有 $x\in[0,\frac{1}{2}]$ 成立，结论是否仍成立？说明理由。

参考答案与评分

(2 分) 固定整数 $n\ge 2$。对 $k=0,\dots,n-1$，有 $k/n\in[0,1-1/n]$，故

$$f((k+1)/n)=f(k/n).$$

(2 分) 逐次应用上式，得 $f(k/n)=f(0)$，其中 $k=0,\dots,n$。

(3 分) 任取 $x\in[0,1]$，令 $k_n=\lfloor nx\rfloor$，则 $0\le k_n\le n$ 且 $0\le x-k_n/n<1/n$，所以 $k_n/n\to x$（1 分）。由连续性，$f(x)=\lim_{n\to\infty}f(k_n/n)=f(0)$，故 f 为常值函数（2 分）。

(1 分) 当只要求 $n=2$ 时，取 $f(x)=\cos(4\pi x)$。它连续，且 $f(0)=1$、$f(1/4)=-1$，所以非常值。

(2 分) 对所有 $x\in[0,1/2]$，有 $f(x+1/2)=\cos(4\pi x+2\pi)=f(x)$（1 分）。因此该函数满足 $n=2$ 的条件，常值结论在此情形下不成立（1 分）。

五、(10 分)

设 $f\colon [0,1]\to\mathbb{R}$ 连续，记 $M=\max_{t\in[0,1]} f(t)$，$m=\min_{t\in[0,1]} f(t)$。
对 $x\in[0,1]$，定义

$$G(x)=\max_{t\in[0,1]}|f(t)-f(x)|.$$

证明 G 在 $[0,1]$ 上连续，且

$$\min_{x\in[0,1]} G(x)=\frac{M-m}{2}.$$

参考答案与评分

(2 分) 固定 $x\in[0,1]$。由 $m\le f(t)\le M$，得 $|f(t)-f(x)|\le\max\{M-f(x),f(x)-m\}$，故 $G(x)$ 也不超过右端。

(2 分) 取 t 为 f 的最大值点，得 $G(x)\ge M-f(x)$（1 分）。取 t 为最小值点，得 $G(x)\ge f(x)-m$（1 分）。因此

$$G(x)=\max\{M-f(x),f(x)-m\}.$$

(2 分) 因为两个连续函数的最大值仍连续，故 G 在 $[0,1]$ 上连续。

(2 分) 两个候选值的和是 $M-m$，故 $G(x)\ge(M-m)/2$。

(2 分) 若 $M>m$，对 f 的最小值点与最大值点之间的区间应用介值定理，可取 x_0 使 $f(x_0)=(M+m)/2$。若 $M=m$，任取 $x_0\in[0,1]$ 即可（1 分）。代入得 $G(x_0)=(M-m)/2$，所求最小值即为 $(M-m)/2$（1 分）。

六、(10 分)

设 $f\colon (0,1)\to\mathbb{R}$ 一致连续。证明 f 在 0 处有有限右极限，在 1 处有有限左极限，并由此证明 f 可唯一地连续延拓至 $[0,1]$。

参考答案与评分

(2 分) 对端点 $a=0$，取 $w_n=1/(n+1)$。对 $a=1$，取 $w_n=1-1/(n+1)$。两种情况下 $w_n\in(0,1)$ 且 $w_n\to a$，所以 (w_n) 是 Cauchy 数列。一致连续性保证 $(f(w_n))$ 也是 Cauchy 数列（两端点各 1 分）。

(2 分) 由实数完备性，$f(w_n)$ 在两种情况下分别收敛到有限实数 L_0、L_1（各 1 分）。记相应的极限为 L_a。

(3 分) 给定 $\varepsilon>0$，由一致连续性取 $\delta>0$，使 $|u-v|<\delta$ 时 $|f(u)-f(v)|<\varepsilon/2$。对 $x\in(0,1)$ 且 $|x-a|<\delta/2$，取充分大的 n，使 $|w_n-a|<\delta/2$ 且 $|f(w_n)-L_a|<\varepsilon/2$。于是 $|x-w_n|<\delta$，从而（2 分）

$$|f(x)-L_a|\le|f(x)-f(w_n)|+|f(w_n)-L_a|<\varepsilon.$$

这就证明 $\lim_{x\to0^+}f(x)=L_0$、$\lim_{x\to1^-}f(x)=L_1$（1 分）。

(2 分) 定义 F 在 $(0,1)$ 上等于 f，并令 $F(0)=L_0$、$F(1)=L_1$（1 分）。由上述单侧极限及 f 在内部的连续性，F 在 $[0,1]$ 上连续（1 分）。

(1 分) 任意连续延拓的端点值均由相应的单侧极限决定，故延拓唯一。

七、(10 分)

定义

$$f(x)=\begin{cases}x^2\sin(1/x), & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

证明 f 在 $\mathbb{R}$ 上处处可导，但 f' 在 0 处不连续。

参考答案与评分

(3 分) 当 $x\neq 0$ 时，应用乘积法则和链式法则（1 分），得（2 分）

$$f'(x)=2x\sin(1/x)-\cos(1/x).$$

(3 分) 当 $h\neq 0$ 时，$\big(f(h)-f(0)\big)/h=h\sin(1/h)$（1 分）。由 $|h\sin(1/h)|\le|h|$（1 分），差商趋于 0，故 $f'(0)=0$，从而 f 处处可导（1 分）。

(2 分) 取 $x_n=1/(2\pi n)\to 0$（1 分），则 $\sin(1/x_n)=0$ 且 $\cos(1/x_n)=1$（1 分）。

(2 分) 代入得 $f'(x_n)=-1$（1 分），故 $f'(x_n)$ 不趋于 $f'(0)=0$，从而 f' 在 0 处不连续（1 分）。

八、(10 分)

已知 $y=\dfrac{\ln x}{x}$ $(x>0)$。对任意正整数 n，求 n 阶导数 $y^{(n)}(x)$。

参考答案与评分

(1 分) 结论分。记 $H_n=\sum_{k=1}^{n}1/k$，则

$$y^{(n)}(x)=\frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}(\ln x-H_n).$$

(2 分) 当 $n=1$ 时，求得 $y'(x)=(1-\ln x)/x^2$（1 分）。这与 $H_1=1$ 时的通式相符（1 分）。

(3 分) 假设通式对 n 成立（1 分）。求导得下式，两项各 1 分：

$$y^{(n+1)}(x)=(-1)^n n!\big(-(n+1)x^{-n-2}(\ln x-H_n)+x^{-n-2}\big).$$

(2 分) 提出公因子 $(-1)^{n+1}(n+1)!/x^{n+2}$（1 分），括号内新增一项 $-1/(n+1)$（1 分），即

$$y^{(n+1)}(x)=\frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{x^{n+2}}\left(\ln x-H_n-\frac{1}{n+1}\right).$$

(2 分) 由 $H_{n+1}=H_n+1/(n+1)$ 得到 $n+1$ 阶通式（1 分）。由数学归纳法，通式对所有正整数 n 成立（1 分）。

九、(10 分)

设 $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ 连续，在 $(0,1)$ 上可导，且 $f(0) = f(1) = 0$。证明存在 $c \in (0,1)$，使得

$$f'(c) + \frac{f(c)}{1+c} = 0.$$

在相同假设下，是否一定存在 $d \in (0,1)$，使得

$$f'(d) + \frac{f(d)}{2+d} = 0\,?$$

说明理由。

参考答案与评分

两问各 5 分。以下前四步对每问各计 1 分，以同一个参数完成两问的论证可同时得分。

(2 分) 对 $a \in \{1,2\}$，定义 $F_a(x) = (a+x)f(x)$。

(2 分) F_a 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 上可导，且 $F_a(0) = F_a(1) = 0$。

(2 分) 由乘积法则，$F_a'(x) = (a+x)f'(x) + f(x)$。

(2 分) 由罗尔定理，存在 $\xi_a \in (0,1)$ 使 $F_a'(\xi_a) = 0$，即

$$(a+\xi_a)f'(\xi_a) + f(\xi_a) = 0.$$

(1 分) 取 $a = 1$、$c = \xi_1$。因 $1 + c > 0$，等式两边除以 $1+c$，即得第一问的等式。

(1 分) 取 $a = 2$、$d = \xi_2$。同理，两边除以 $2 + d > 0$，即得第二问的等式。因此所求的 d 一定存在。

十、(10 分)

设 $f\colon (0,1)\to\mathbb{R}$ 连续，且对每个 $x\in(0,1)$，都有

$$\lim_{y\to 0}\frac{f(x+y)+f(x-y)-2f(x)}{y}=0.$$

证明对任意 $0<a<b<1$，存在 $x_0\in(a,b)$，使得 f 在 x_0 处可微。

参考答案与评分

(2 分) 任取 $0<a<b<1$，记端点割线为

$$L(t)=f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(t-a).$$

令 $g(t)=f(t)-L(t)$（1 分），则 g 在 $[a,b]$ 上连续且 $g(a)=g(b)=0$（1 分）。

(1 分) 若 g 在 $[a,b]$ 上恒为零，则 f 在 (a,b) 上处处可微。

(2 分) 否则，g 在 (a,b) 内某点为正或为负。由最值定理，若有正值，则 g 取得正的最大值。若有负值，则 g 取得负的最小值（1 分）。由于 $g(a)=g(b)=0$，相应的最值点 x_0 必在 (a,b) 内（1 分）。

(1 分) L 是一次式或常数，故 $L(x_0+y)+L(x_0-y)-2L(x_0)=0$。因此 g 在 x_0 处满足题设的同一极限条件。

(2 分) 对充分小的 $y\neq 0$，有 $x_0\pm y\in[a,b]$。由于 x_0 是最值点，$g(x_0+y)-g(x_0)$ 与 $g(x_0-y)-g(x_0)$ 同号或为零（1 分），故（1 分）

$$\left|\frac{g(x_0+y)-g(x_0)}{y}\right|\le\left|\frac{g(x_0+y)+g(x_0-y)-2g(x_0)}{y}\right|.$$

(1 分) 右端随 $y\to 0$ 趋于 0，所以左端也趋于 0，即 $g'(x_0)=0$。

(1 分) 因 $f=g+L$，得 f 在 $x_0\in(a,b)$ 处可微，且 $f'(x_0)=(f(b)-f(a))/(b-a)$。