线性代数 B1 期中考试答案（2026-2027 学年第一学期）

一、**(8 分)** 设 α,β,γ 为 3 维列向量. 已知 $\det(\alpha,\beta,\gamma)=5$, 计算 $\det(2\alpha-\beta,\ -\alpha+2\beta-\gamma,\ \beta+3\gamma)$ 的值.

解:

$$\begin{aligned}
&\det(2\alpha-\beta,\ -\alpha+2\beta-\gamma,\ \beta+3\gamma)\\
=\ &\det(2\alpha,\ 2\beta,\ 3\gamma)+\det(2\alpha,\ -\gamma,\ \beta)+\det(-\beta,\ -\alpha,\ 3\gamma)\\
=\ &12\det(\alpha,\beta,\gamma)-2\det(\alpha,\gamma,\beta)+3\det(\beta,\alpha,\gamma)\\
=\ &12\det(\alpha,\beta,\gamma)+2\det(\alpha,\beta,\gamma)-3\det(\alpha,\beta,\gamma)\\
=\ &11\det(\alpha,\beta,\gamma)\\
=\ &55.
\end{aligned}$$

二、**(14 分)** 已知线性方程组

$$\begin{cases}
x_1+3x_2-x_3+x_4=1,\\
x_1+7x_2+3x_3+9x_4=a,\\
x_1+4x_2\qquad\ +3x_4=2,\\
2x_1+7x_2-x_3+4x_4=3
\end{cases}$$

有解.

(1)（7 分）求 a 满足的条件.

(2)（7 分）求此方程组的全部解.

解: (1)

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&3&-1&1&1\\1&7&3&9&a\\1&4&0&3&2\\2&7&-1&4&3\end{array}\right)\xrightarrow[r_4-2r_1]{r_2-r_1,\ r_3-r_1}\left(\begin{array}{cccc|c}1&3&-1&1&1\\0&4&4&8&a-1\\0&1&1&2&1\\0&1&1&2&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_4-r_3]{r_2-4r_3}\left(\begin{array}{cccc|c}1&3&-1&1&1\\0&0&0&0&a-5\\0&1&1&2&1\\0&0&0&0&0\end{array}\right).$$

系数矩阵的秩为 2, 方程组有解当且仅当增广矩阵的秩也为 2, 即 $a-5=0$. 所以 $a=5$ 时方程组有解.

(2) 当 $a=5$ 时, 方程组等价于

$$\begin{cases}x_1+3x_2=1+x_3-x_4,\\ x_2=1-x_3-2x_4,\end{cases}\qquad\text{即}\qquad\begin{cases}x_1=-2+4x_3+5x_4,\\ x_2=1-x_3-2x_4.\end{cases}$$

取 $x_3 = x_4 = 0$, 得特解 $(-2, 1, 0, 0)^T$.

取 $(x_3, x_4) = (1, 0)$ 与 $(0, 1)$, 得对应齐次线性方程组的基础解系 $\eta_1 = (4, -1, 1, 0)^T$, $\eta_2 = (5, -2, 0, 1)^T$. $\therefore$ 全部解为

$$\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \, s, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

三、**(10 分)** 计算 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & & \\ & 2 & 1 & \\ & & 2 & 0 \\ & & & 2 \end{pmatrix}^n$ （$n \geq 3$）.（结果需化简）

解:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & & \\ & 2 & 1 & \\ & & 2 & 0 \\ & & & 2 \end{pmatrix} = 2I_4 + N, \qquad \text{其中} N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & \\ & & 0 & 0 \\ & & & 0 \end{pmatrix}.$$

注意到

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 \\ & & & 0 \end{pmatrix}, \qquad N^3 = O,$$

且 $2I_4$ 与 N 相乘可交换.

$$\begin{aligned} A^n = (2I_4 + N)^n &= (2I_4)^n + n(2I_4)^{n-1}N + \frac{n(n-1)}{2}(2I_4)^{n-2}N^2 \\ &= \begin{pmatrix} 2^n & & & \\ & 2^n & & \\ & & 2^n & \\ & & & 2^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & n2^{n-1} & & \\ & 0 & n2^{n-1} & \\ & & 0 & 0 \\ & & & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{n(n-1)}{2}2^{n-2} & 0 \\ & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 \\ & & & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} & 2^{n-3}n(n-1) & 0 \\ & 2^n & n2^{n-1} & 0 \\ & & 2^n & 0 \\ & & & 2^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

四、(14 分) 已知 $A=\begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&0&1\\1&1&1&0\end{pmatrix}$. 求伴随矩阵 A^*（7 分）和逆矩阵 A^{-1}（7 分）.

解： (1) 求 A^{-1}. 对 $(A\,|\,I_4)$ 作初等行变换:

$$(A\,|\,I_4)=\left(\begin{array}{cccc|cccc}0&1&1&1&1&0&0&0\\1&0&1&1&0&1&0&0\\1&1&0&1&0&0&1&0\\1&1&1&0&0&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_1+r_2+r_3+r_4}\left(\begin{array}{cccc|cccc}3&3&3&3&1&1&1&1\\1&0&1&1&0&1&0&0\\1&1&0&1&0&0&1&0\\1&1&1&0&0&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{3}r_1}\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&1&1&1&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\1&0&1&1&0&1&0&0\\1&1&0&1&0&0&1&0\\1&1&1&0&0&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_i-r_1\ (i=2,3,4)}\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&1&1&1&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\0&-1&0&0&-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}\\0&0&-1&0&-\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}\\0&0&0&-1&-\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_1+r_2+r_3+r_4}\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\0&-1&0&0&-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}\\0&0&-1&0&-\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}\\0&0&0&-1&-\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-r_i\ (i=2,3,4)}\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\0&1&0&0&\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\0&0&1&0&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\\0&0&0&1&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}\end{array}\right).$$

所以

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3}\end{pmatrix}.$$

(2) 求 A^*. 先计算行列式:

$$|A|=\begin{vmatrix}0 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 0\end{vmatrix}\underline{\underline{\ r_i-r_1\ (i=2,3,4)\ }}\begin{vmatrix}0 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & -1\end{vmatrix}$$

$$\underline{\underline{\ r_1+r_2+r_3+r_4\ }}\begin{vmatrix}3 & 0 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & -1\end{vmatrix}=3\cdot(-1)^3=-3.$$

则 $A^*=|A|A^{-1}=-3A^{-1}=\begin{pmatrix}2 & -1 & -1 & -1\\ -1 & 2 & -1 & -1\\ -1 & -1 & 2 & -1\\ -1 & -1 & -1 & 2\end{pmatrix}$.

五、(14 分) 考虑 $\mathbb{R}^3$ 中的两组基 Γ_1: $\alpha_1=(1,0,-1)^T$, $\alpha_2=(2,1,1)^T$, $\alpha_3=(1,1,0)^T$ 和 Γ_2: $\beta_1=(0,1,1)^T$, $\beta_2=(1,-1,0)^T$, $\beta_3=(1,2,1)^T$.

(1)（7 分）已知向量 η 在 Γ_1 下的坐标为 $(2,5,3)^T$, 求 η 在 Γ_2 下的坐标.

(2)（7 分）已知向量 ξ 在 Γ_1 和 Γ_2 下的坐标相同, 求所有满足条件的 ξ.

解： 记 α_i,β_i 为列的矩阵

$$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&1\\-1&1&0\end{pmatrix},\qquad B=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&-1&2\\1&0&1\end{pmatrix}.$$

(1) 设 η 在 Γ_2 下的坐标为 $(y_1,y_2,y_3)^T$, 则 $\eta=2\alpha_1+5\alpha_2+3\alpha_3=y_1\beta_1+y_2\beta_2+y_3\beta_3$. 两边转置得

$$\eta=A\begin{pmatrix}2\\5\\3\end{pmatrix}=B\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}\implies\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=B^{-1}A\begin{pmatrix}2\\5\\3\end{pmatrix}.$$

其中 $|B|=2$, $B^{-1}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}-1&-1&3\\1&-1&1\\1&1&-1\end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix}2\\5\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15\\8\\3\end{pmatrix}$, 所以

$$\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=B^{-1}A\begin{pmatrix}2\\5\\3\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1&-1&3\\1&-1&1\\1&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}15\\8\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7\\5\\10\end{pmatrix}.$$

即 η 在 Γ_2 下的坐标为 $(-7,5,10)^T$.

(2) 设 ξ 在两组基下的坐标均为 $X=(x_1,x_2,x_3)^T$. 则 $\xi=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=x_1\beta_1+x_2\beta_2+x_3\beta_3$, 两边转置得

$$\xi=AX=BX\implies(A-B)X=0.$$

$$A-B=\begin{pmatrix}1&1&0\\-1&2&-1\\-2&1&-1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3+2r_1]{r_2+r_1}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&3&-1\\0&3&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3-r_2}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&3&-1\\0&0&0\end{pmatrix},$$

得基础解系 $(-1,1,3)^T$, 故 $X=t(-1,1,3)^T$, 即 ξ 的坐标为 $t(-1,1,3)^T$, $t\in\mathbb{R}$.

于是向量

$$\xi=t(-\alpha_1+\alpha_2+3\alpha_3)=t\,(4,4,2)^T,\quad t\in\mathbb{R}.$$

六、(16 分) 设 Γ_1: $\alpha_1=(1,1,2,0,3)^T$, $\alpha_2=(1,2,1,3,2)^T$, $\alpha_3=(1,1,0,2,-1)^T$ 和 Γ_2: $\beta_1=(1,2,-1,c,-2)^T$, $\beta_2=(2,1,1,1,-1)^T$, $\beta_3=(-1,-3,0,d,-1)^T$ 是齐次线性方程组 $AX=0$ 的两组基础解系.

(1)（8 分）求 c,d.

(2)（8 分）求一个满足以上条件的矩阵 A.

解: (1) Γ_1 与 Γ_2 都是 $AX=0$ 的基础解系 $\Longrightarrow$ Γ_1 与 Γ_2 等价 $\Longrightarrow$ $\mathrm{rank}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2,\beta_3)=\mathrm{rank}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=3$.

考虑矩阵 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\,|\,\beta_1,\beta_2,\beta_3)$, 作初等行变换:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&2&-1\\1&2&1&2&1&-3\\2&1&0&-1&1&0\\0&3&2&c&1&d\\3&2&-1&-2&-1&-1\end{array}\right)\xrightarrow[r_5-3r_1]{r_2-r_1,\ r_3-2r_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&2&-1\\0&1&0&1&-1&-2\\0&-1&-2&-3&-3&2\\0&3&2&c&1&d\\0&-1&-4&-5&-7&2\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_5+r_2]{r_3+r_2,\ r_4-3r_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&2&-1\\0&1&0&1&-1&-2\\0&0&-2&-2&-4&0\\0&0&2&c-3&4&d+6\\0&0&-4&-4&-8&0\end{array}\right)\xrightarrow[r_5-2r_3]{r_4+r_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&2&-1\\0&1&0&1&-1&-2\\0&0&-2&-2&-4&0\\0&0&0&c-5&0&d+6\\0&0&0&0&0&0\end{array}\right).$$

秩为 3 当且仅当 $c-5=0$, $d+6=0$. 所以 $c=5$, $d=-6$.

(2) 记 $N(A)$ 为 $AX=0$ 的解空间, 则 $\dim N(A)=3$, 可知 $\mathrm{rank}(A)=5-\dim N(A)=5-3=2$.

则可取 A 为 2×5 矩阵. 设 $A=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}$, 并记

$$M=\begin{pmatrix}\alpha_1^T\\\alpha_2^T\\\alpha_3^T\end{pmatrix}.$$

则 $A\alpha_i=0$ $(i=1,2,3)$ 等价于 u_1^T,u_2^T 是 $My=0$ 的解. 取 u_1^T,u_2^T 为 $My=0$ 的基础解系即可.

$$M=\begin{pmatrix}1&1&2&0&3\\1&2&1&3&2\\1&1&0&2&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2-r_1,\ r_3-r_1}\begin{pmatrix}1&1&2&0&3\\0&1&-1&3&-1\\0&0&-2&2&-4\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{2}r_3}\begin{pmatrix}1&1&2&0&3\\0&1&-1&3&-1\\0&0&1&-1&2\end{pmatrix}\xrightarrow[r_1-r_2-2r_3]{r_2+r_3}\begin{pmatrix}1&0&0&0&-2\\0&1&0&2&1\\0&0&1&-1&2\end{pmatrix}.$$

即 $y_1 = 2y_5$, $y_2 = -2y_4 - y_5$, $y_3 = y_4 - 2y_5$, 有基础解系

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

则可取 $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

七、(14 分) 设 V 是任一线性空间, $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 是 V 中线性无关的向量. 考虑向量

$$\begin{aligned}
&\beta_1 = 2\alpha_1+\alpha_2+3\alpha_3+\alpha_4, && \beta_2 = -\alpha_1+\alpha_2-3\alpha_3,\\
&\beta_3 = \alpha_1+5\alpha_2-3\alpha_3+2\alpha_4, && \beta_4 = \alpha_1+2\alpha_2+\alpha_4,\\
&\beta_5 = \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4.
\end{aligned}$$

(1)（7 分）判断向量组 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 的线性相关性, 并说明理由.

(2)（7 分）记 W 为 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4,\beta_5$ 在 V 中生成的子空间. 求 W 的维数, 给出 W 的一组基.

解:

$$(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4,\beta_5) = (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\,T, \qquad T = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 5 & 2 & 1\\ 3 & -3 & -3 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

对 T 作初等行变换:

$$T \xrightarrow[r_3-3r_4]{r_1-2r_4,\ r_2-r_4} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -3 & -1 & -1\\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0\\ 0 & -3 & -9 & -3 & -2\\ 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1+r_2,\ r_3+3r_2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2\\ 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3-2r_1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_4} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 2 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

记最后矩阵的列向量为 $\zeta_1,\dots,\zeta_5$. 易见 $\zeta_3 = 2\zeta_1+3\zeta_2$, $\zeta_4 = \zeta_1+\zeta_2$, 且 ζ_1,ζ_2,ζ_5 线性无关.

(1) $\zeta_4 = \zeta_1+\zeta_2 \Longrightarrow \zeta_1,\zeta_2,\zeta_3,\zeta_4$ 线性相关 $\Longrightarrow \beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 线性相关(或具体地, $\beta_4 = \beta_1+\beta_2$)
.

(2) $W = \langle\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4,\beta_5\rangle$.

ζ_1,ζ_2,ζ_5 是 $\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3,\zeta_4,\zeta_5$ 的极大线性无关组

$\Longrightarrow \beta_1,\beta_2,\beta_5$ 是 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4,\beta_5$ 的极大线性无关组

$\Longrightarrow \dim W = 3$, β_1,β_2,β_5 是 W 的一组基.

八、(10 分) 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 为 n 阶非零复方阵, $\mathrm{rank}(A)=r$.

(1)（4 分）证明: 存在 n 阶复方阵 B, 满足 $\mathrm{rank}(B)=n-r$, 且 $AB=O$, $BA=O$.

(2)（6 分）证明: 若 A 为对称阵, 则 A 有 r 阶非零主子式.

(即存在 $1\le i_1<i_2<\cdots<i_r\le n$, 使得

$$\begin{vmatrix} a_{i_1i_1} & a_{i_1i_2} & \cdots & a_{i_1i_r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i_ri_1} & a_{i_ri_2} & \cdots & a_{i_ri_r} \end{vmatrix} \neq 0.)$$

证明: (1) $\mathrm{rank}(A)=r \Longrightarrow$ 存在 n 阶可逆阵 P,Q, 使得 $A=P\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}Q$.

取 $B=Q^{-1}\begin{pmatrix} O & O \\ O & I_{n-r} \end{pmatrix}P^{-1}$, 则 $\mathrm{rank}(B)=n-r$, 且

$$AB=P\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}QQ^{-1}\begin{pmatrix} O & O \\ O & I_{n-r} \end{pmatrix}P^{-1}=P\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} O & O \\ O & I_{n-r} \end{pmatrix}P^{-1}=O,$$

$$BA=Q^{-1}\begin{pmatrix} O & O \\ O & I_{n-r} \end{pmatrix}P^{-1}P\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}Q=Q^{-1}\begin{pmatrix} O & O \\ O & I_{n-r} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}Q=O.$$

(2) 设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$. 由 $A^T=A$ 得

$$A=\begin{pmatrix} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T \\ \vdots \\ \alpha_n^T \end{pmatrix}.$$

设 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\ldots,\alpha_{i_r}$ 是 A 的列向量组的极大线性无关组, 则 $\alpha_{i_1}^T,\alpha_{i_2}^T,\ldots,\alpha_{i_r}^T$ 是 A 的行向量组的极大线性无关组.

取 $A_1=(\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\ldots,\alpha_{i_r})$, 则 $A_1\in\mathbb{C}^{n\times r}$, 列满秩, $\mathrm{rank}(A_1)=r$.

记

$$A_1=\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix},$$

其中 $u_l=(a_{li_1},a_{li_2},\ldots,a_{li_r})$, 则 α_l^T 是 u_l 的加长向量.

$\alpha_{i_1}^T,\ldots,\alpha_{i_r}^T$ 是 A 的行向量组的极大线性无关组 $\Longrightarrow \forall\,\alpha_l^T$ 可由 $\alpha_{i_1}^T,\ldots,\alpha_{i_r}^T$ 线性表示 $(1\le l\le n)$

$\Longrightarrow$（只取第 $i_1,\ldots,i_r$ 个分量）$\forall\,u_l$ 可由 $u_{i_1},\ldots,u_{i_r}$ 线性表示

$\Longrightarrow \mathrm{rank}(u_1,\ldots,u_n)=\mathrm{rank}(u_{i_1},\ldots,u_{i_r})$.

又 $\operatorname{rank}(u_1,\ldots,u_n)=\operatorname{rank}(A_1)=r$, 故 $u_{i_1},\ldots,u_{i_r}$ 线性无关, 从而

$$\begin{vmatrix} u_{i_1} \\ u_{i_2} \\ \vdots \\ u_{i_r} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{i_1 i_1} & \cdots & a_{i_1 i_r} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i_r i_1} & \cdots & a_{i_r i_r} \end{vmatrix} \neq 0.$$

即 A 有 r 阶非零主子式. □