线性代数 A2 期中考试

2026 年 11 月 4 日 9:45　11:45，5401 教室

姓名_____ 学号_____ 得分_____

说明：涉及到的运算都是通常的运算．禁止直接使用课本习题或其他参考书中的结论．

一、填空题．每空 5 分，共 25 分．结果需化简，写在答题区域．

1. 实线性空间 $\mathscr{C}[0,2\pi]$ 中的向量组 $\{\sin(kx),(\sin x)^k \mid k=1,2,3\}$ 的秩 $=$ ①．

2. 设实线性空间 $V=\mathbb{C}^{2\times 2}$ 的子空间 $V_1=\{X\in V \mid AX=O\}$，其中 $A=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$，$V_2=\{X\in V \mid X^H=X\}$，则 $\dim(V_1+V_2)=$ ②．

3. 从实线性空间 $\mathbb{R}_3[x]$ 的基 $(x+2)^2,(x+1)^2,x^2$ 到基 $x^2,(x-1)^2,(x-2)^2$ 的过渡矩阵 $=$ ③．

4. 实线性空间 $\mathbb{R}^3$ 上绕向量 $(1,2,3)$ 旋转 $180°$ 的旋转变换在标准基 $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3$ 下的矩阵 $=$ ④．

5. 实线性空间 $\mathbb{R}_3[x]$ 上的线性变换 $\mathcal{A}: f(x)\mapsto f(x+2\pi)$ 的最小多项式 $d_{\mathcal{A}}(x)=$ ⑤．

二、简答题．每题 6 分，共 30 分．判断下列叙述是否正确，并简要说明理由．

1. 设 V_1,V_2 是线性空间 V 的子空间，$V_1\cap V_2=\{\mathbf{0}\}$，则直积 $V_1\times V_2$ 与 V_1+V_2 同构．

2. 设 U 是线性空间 V 的子空间，则它们的对偶空间 U^* 是 V^* 的子空间．

3. 设 $\mathcal{A}$ 是线性空间 V 上的线性变换，则 $\mathcal{A}$ 有左逆当且仅当 $\mathcal{A}$ 有右逆．

4. 设 $\mathcal{A}$ 是线性空间 V 上的线性变换，$\operatorname{Im}\mathcal{A}\cap\operatorname{Ker}\mathcal{A}=\{\mathbf{0}\}$，则 $V=\operatorname{Im}\mathcal{A}\oplus\operatorname{Ker}\mathcal{A}$．

5. 设 $\mathcal{A}$ 是线性空间 V 上的线性变换，则 $\operatorname{Im}(\mathcal{I}+\mathcal{A})+\operatorname{Ker}(\mathcal{A}^{2026})$ 是 $\mathcal{A}$-不变子空间．

三、解答题．每题 15 分，共 45 分．需给出详细解答和证明过程．

1. 设 V_1,V_2 是线性空间 V 的子空间，$W=V_1\cap V_2$．
   求证：$(V_1+V_2)/W=(V_1/W)\oplus(V_2/W)$．

2. 设 $\mathcal{A}$ 是实线性空间 V 上的线性变换，$f,g\in\mathbb{R}[x]$ 互素，$f(\mathcal{A})g(\mathcal{A})=\mathcal{O}$．
   求证：$\operatorname{Ker} f(\mathcal{A})=\operatorname{Im} g(\mathcal{A})$．

3. 设 $\mathcal{A}$ 是线性空间 V 上的线性变换，U_1 是 $\mathcal{A}$-不变子空间，U_2 是 $\mathcal{A}$-循环子空间．
   求证：$U_1\cap U_2$ 是 $\mathcal{A}$-循环子空间．