线性代数 A2 期中考试

2026 年 11 月 4 日 9:45—11:45，5401 教室

姓名_____ 学号_____ 得分_____

说明：涉及到的运算都是通常的运算．禁止直接使用课本习题或其他参考书中的结论．

一、填空题．每空 5 分，共 25 分．结果需化简，写在答题区域．

1. 实线性空间 $\mathscr{C}[0,2\pi]$ 中的向量组 $\{\sin(kx),(\sin x)^k \mid k=1,2,3\}$ 的秩 $=$__①__．
2. 设实线性空间 $V=\mathbb{C}^{2\times 2}$ 的子空间 $V_1=\{X\in V \mid AX=O\}$，其中 $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$，$V_2=\{X\in V \mid X^H=X\}$，则 $\dim(V_1+V_2)=$__②__．
3. 从实线性空间 $\mathbb{R}_3[x]$ 的基 $(x+2)^2,(x+1)^2,x^2$ 到基 $x^2,(x-1)^2,(x-2)^2$ 的过渡矩阵 $=$__③__．
4. 实线性空间 $\mathbb{R}^3$ 上绕向量 $(1,2,3)$ 旋转 180° 的旋转变换在标准基 $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3$ 下的矩阵 $=$__④__．
5. 实线性空间 $\mathbb{R}_3[x]$ 上的线性变换 $\mathcal{A}:f(x)\mapsto f(x+2\pi)$ 的最小多项式 $d_{\mathcal{A}}(x)=$__⑤__．

二、简答题．每题 6 分，共 30 分．判断下列叙述是否正确，并简要说明理由．

1. 设 V_1,V_2 是线性空间 V 的子空间，$V_1\cap V_2=\{\mathbf{0}\}$，则直积 $V_1\times V_2$ 与 V_1+V_2 同构．
2. 设 U 是线性空间 V 的子空间，则它们的对偶空间 U^* 是 V^* 的子空间．
3. 设 $\mathcal{A}$ 是线性空间 V 上的线性变换，则 $\mathcal{A}$ 有左逆当且仅当 $\mathcal{A}$ 有右逆．
4. 设 $\mathcal{A}$ 是线性空间 V 上的线性变换，$\operatorname{Im}\mathcal{A}\cap\operatorname{Ker}\mathcal{A}=\{\mathbf{0}\}$，则 $V=\operatorname{Im}\mathcal{A}\oplus\operatorname{Ker}\mathcal{A}$．
5. 设 $\mathcal{A}$ 是线性空间 V 上的线性变换，则 $\operatorname{Im}(\mathcal{I}+\mathcal{A})+\operatorname{Ker}(\mathcal{A}^{2026})$ 是 $\mathcal{A}$-不变子空间．

三、解答题．每题 15 分，共 45 分．需给出详细解答和证明过程．

1. 设 V_1,V_2 是线性空间 V 的子空间，$W=V_1\cap V_2$．
   求证：$(V_1+V_2)/W=(V_1/W)\oplus(V_2/W)$．
2. 设 $\mathcal{A}$ 是实线性空间 V 上的线性变换，$f,g\in\mathbb{R}[x]$ 互素，$f(\mathcal{A})g(\mathcal{A})=\mathcal{O}$．
   求证：$\operatorname{Ker}f(\mathcal{A})=\operatorname{Im}g(\mathcal{A})$．
3. 设 $\mathcal{A}$ 是线性空间 V 上的线性变换，U_1 是 $\mathcal{A}$-不变子空间，U_2 是 $\mathcal{A}$-循环子空间．
   求证：$U_1\cap U_2$ 是 $\mathcal{A}$-循环子空间．

参考答案与评分标准

一、 ① 4 ② 7 ③ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -8 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ ④ $\frac{1}{7}\begin{pmatrix} -6 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 6 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}$ ⑤ $(x-1)^3$

二、 每小题判断 1 分，理由 5 分.

1. 正确. $\dim(V_1 \oplus V_2) = \dim(V_1) + \dim(V_2) = \dim(V_1 \times V_2)$.
2. 错误. $U^* = L(U, \mathbb{F}) \not\subset L(V, \mathbb{F}) = V^*$.
3. 错误. 例如，$V = \mathbb{R}[x]$，$\mathcal{A} : f(x) \mapsto xf(x)$ 有左逆、无右逆.
4. 错误. 例如，$V, \mathcal{A}$ 同上，$\operatorname{Ker}\mathcal{A} = \{\mathbf{0}\}$，$V \neq \operatorname{Im}\mathcal{A}$.
5. 正确. $\operatorname{Im}(\mathcal{I} + \mathcal{A})$ 和 $\operatorname{Ker}(\mathcal{A}^{2026})$ 都是 $\mathcal{A}$-不变的，其和空间也是 $\mathcal{A}$-不变的.

三、

1. 验证下列结论，每个 5 分. ① $(V_1 + V_2)/W \subset (V_1/W) + (V_2/W)$.
   ② $(V_1 + V_2)/W \supset (V_1/W) + (V_2/W)$. ③ $(V_1/W) \cap (V_2/W) = \{\mathbf{0}\}$.

2. 根据 Bezout 定理，存在 $u, v \in \mathbb{R}[x]$ 使得 $f(\mathcal{A})u(\mathcal{A}) + g(\mathcal{A})v(\mathcal{A}) = \mathcal{I}$. (5 分)
   $\alpha \in \operatorname{Ker} f(\mathcal{A}) \Rightarrow \alpha = g(\mathcal{A})v(\mathcal{A})\alpha \in \operatorname{Im} g(\mathcal{A})$. 故 $\operatorname{Ker} f(\mathcal{A}) \subset \operatorname{Im} g(\mathcal{A})$. (5 分)
   $f(\mathcal{A})g(\mathcal{A}) = \mathcal{O} \Rightarrow \operatorname{Im} g(\mathcal{A}) \subset \operatorname{Ker} f(\mathcal{A})$. 综上，$\operatorname{Ker} f(\mathcal{A}) = \operatorname{Im} g(\mathcal{A})$. (5 分)

3. ① 设 $U_2 = \mathbb{F}[\mathcal{A}]\alpha$，$f \in \mathbb{F}[x]$ 使 $\beta = f(\mathcal{A})\alpha \in U_1$ 且 $\deg f$ 最小，则 $\mathbb{F}[\mathcal{A}]\beta \subset U_1 \cap U_2$.
   ② $v \in U_1 \cap U_2 \Rightarrow \exists g \in \mathbb{F}[x]$ 使 $v = g(\mathcal{A})\alpha \Rightarrow h(\mathcal{A})\alpha \in U_1 \cap U_2$，其中 $h = \gcd(f, g)$.
   ③ 由 $\deg f$ 最小，得 $f \mid g$，从而 $v \in \mathbb{F}[\mathcal{A}]\beta$. 综上，$U_1 \cap U_2 = \mathbb{F}[\mathcal{A}]\beta$. (每个 5 分)